

Décomposition de domaine et préconditionnement pour un modèle 3D en milieu poreux fracturé

Laila AMIR^{1*}, Michel KERN^{2*}, Vincent MARTIN^{3*}, Jean E ROBERTS^{4*}

Résumé : Dans cet article, nous nous intéressons à la modélisation de l'écoulement d'un fluide monophasique dans un milieu poreux faillé en utilisant une méthode de décomposition de domaine. Dans l'approche proposée, la fracture est considérée comme une interface active, les conditions de transmission et les échanges entre la roche et la fracture font intervenir les propriétés de l'écoulement dans la fracture. On doit résoudre un problème d'interface non standard qui prend en compte l'écoulement dans les fractures.

Abstract : In this paper, we are interested in modeling the flow of a single phase fluid in a porous medium with fractures, using a domain decomposition method. In the proposed approach, the fracture is regarded as an active interface, the transmission conditions and the exchanges between the rock and the fracture taking into account the flow in the fracture. We then have to solve a non standard interface problem which takes into account the flow in the fractures.

Mots-cles : fractures, milieu poreux, décomposition de domaine, écoulement, interface, conditions de transmission

Keywords : fractures, porous medium, domain decomposition, flux, interface, transmission conditions.

1 Introduction

Les milieux poreux sont généralement hétérogènes. L'une des raisons est la présence de fractures qui peuvent jouer un rôle hydraulique en contribuant de manière considérable à la capacité des sols à transporter l'eau et les polluants ; ceci explique l'importance de la modélisation des fractures et de leur prise en compte lors d'une simulation d'écoulement dans un milieu poreux fracturé.

On peut distinguer deux types de fractures : les grandes fractures qui représentent des discontinuités géologiques, et qui sont en général beaucoup plus perméables que le milieu ambiant, devenant des canaux privilégiés pour l'écoulement. Mais elles peuvent être au contraire peu perméables représentant des barrières géologiques. Le deuxième type de fracture est celui de petites fractures qui apparaissent en grand nombre dans le milieu formant un réseau de fissures, dont les localisations précises sont difficiles à déterminer [6], [5].

Divers travaux et modèles traitent le problème des fractures suivant ses différents types. Une approche s'appuie sur le raffinement local du maillage au niveau de la fracture [4]. Un autre modèle,

*INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex 1: Email: Laila.Amir@inria.fr 2: Email:-Michel.Kern@inria.fr 3: Email: Vincent.Martin@inria.fr 4: Email: Jean.Roberts@inria.fr

présenté dans [1], [2] et dont cet article est la suite, consiste à assimiler une fracture de grande perméabilité à une interface, et à traiter le problème résultant par une méthode de décomposition de domaine. Dans ce modèle, l'originalité repose sur le traitement de l'interface à travers laquelle la pression est continue mais le flux est discontinu. Ce modèle est généralisé au cas de fractures moins perméables dans [7], couplant sur l'interface sauts de pression et sauts de vitesse normale. Ces deux derniers modèles sont étudiés théoriquement et numériquement en 2D avec des fractures régulières et perpendiculaire à la direction d'écoulement. Dans notre travail, nous allons généraliser ces études au cas 3D, avec des fractures très perméables qui peuvent s'intersecter et qui forment un angle quelconque avec la direction d'écoulement.

2 Équations d'écoulement

Dans un milieu poreux Ω (ouvert connexe, régulier de \mathbb{R}^3), on considère un fluide monophasique incompressible dont l'écoulement est indépendant du temps, régi par deux lois :

- la loi de conservation de masse ;

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1)$$

avec \vec{u} la vitesse de Darcy et f le terme source,

- et la loi de Darcy ;

$$\vec{u} = -K \vec{\nabla} p \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.2)$$

où p est la pression, et K est le tenseur de perméabilité.

On ajoute des conditions aux limites qui peuvent être :

$$p = p_d \quad \text{dans } \partial\Omega_D \quad (2.3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N, \quad (2.4)$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ forment une partition de $\partial\Omega$, et $\vec{\nu}$ est la normale unitaire sortante à Ω .

3 Problème modèle avec les fractures

La prise en compte des hétérogénéités est une des difficultés principales de la modélisation de l'écoulement et du transport dans le sous-sol. On considère dans notre étude le cas où le domaine de calcul est une partie tridimensionnelle d'un massif sédimentaire divisé en plusieurs sous-domaines par des fractures considérées comme des interfaces plus perméables que le milieu ambiant.

On prend comme problème modèle un domaine géologique Ω de dimension 3, subdivisé en quatre sous-domaines Ω_i , $i=1, \dots, 4$, naturellement séparés par des fractures. La figure (1) présente le type de configurations auxquelles nous nous intéressons. Les fractures ($\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{34}$) sont aussi des milieux poreux, plus perméables, mais leur dimension transverse est supposée beaucoup plus petite que les deux autres, et elles sont assimilées à des interfaces (sans épaisseur, bien qu'une constante représentant l'épaisseur intervienne dans la loi de Darcy sur la fissure) :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^4 \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \bar{\gamma}_{ij} \quad \text{pour tout } i, j \in I = \{1, 2, 3, 4\},$$

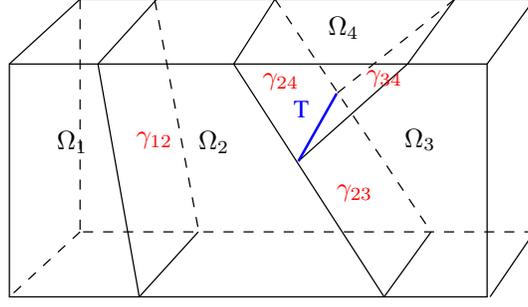


FIG. 1 – Géométrie du domaine de calcul

On notera :

$$\Gamma_{Di} = \partial\Omega_D \cap \partial\Omega_i \quad \text{et} \quad \Gamma_{Ni} = \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_i \quad \text{pour tout } i \in I.$$

$$T = \overline{\gamma}_{23} \cap \overline{\gamma}_{24} \cap \overline{\gamma}_{34} \quad \text{et} \quad \gamma_{ij} = (\overline{\gamma}_{ij} \cap \Omega) \setminus T \quad \text{pour tout } i, j \in I.$$

Sur chaque sous-domaine Ω_i , on retrouve les équations d'écoulement usuelles (3.5), (3.6) :

$$\operatorname{div}(\vec{u}_i) = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \quad (3.5)$$

$$\vec{u}_i = -K_i \vec{\nabla} p_i \quad \text{dans } \Omega_i \quad (3.6)$$

$$p_i = p_{di} \quad \text{sur } \Gamma_{Di} \quad (3.7)$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{Ni} \quad (3.8)$$

$$p_i = p_{\gamma_{ij}} \quad \text{sur } \gamma_{ij}. \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) représente la continuité de la pression à travers la fracture γ_{ij} . Sur chaque fracture γ_{ij} , des lois analogues sont valides (3.10), (3.11) :

$$\operatorname{div}_{\gamma_{ij}}(\vec{u}_{\gamma_{ij}}) = f_{\gamma_{ij}} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i + \vec{u}_j \cdot \vec{\nu}_j) \quad \text{sur } \gamma_{ij} \quad (3.10)$$

$$\vec{u}_{\gamma_{ij}} = -d_{ij} K_{\gamma_{ij}} \vec{\nabla}_{\gamma_{ij}} p_{\gamma_{ij}} \quad \text{sur } \gamma_{ij} \quad (3.11)$$

$$p_{\gamma_{ij}} = p_{d\gamma_{ij}} \quad \text{sur } \partial\gamma_{ij} \cap \partial\Omega_D \quad (3.12)$$

$$\vec{u}_{\gamma_{ij}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{sur } \partial\gamma_{ij} \cap \partial\Omega_N \quad (3.13)$$

$$p_{\gamma_{ij}} = p_T \quad \text{sur } T, \quad (3.14)$$

où $p_{d\gamma_{ij}}$ est la pression donnée sur le bord Dirichlet de la fracture, d_{ij} est l'épaisseur de la fracture γ_{ij} , et le terme $(\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i + \vec{u}_j \cdot \vec{\nu}_j)$ est un terme source qui représente la contribution du flux des sous-domaines au flux dans la fracture. L'équation (3.14) impose la continuité de la pression à l'intersection T . Pour fermer le système, nous avons besoin d'une condition supplémentaire au niveau de l'intersection T des interfaces. Nous imposerons en plus de la continuité de la pression (3.14) la continuité du flux sur T :

$$\vec{u}_{\gamma_{23}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{23}} + \vec{u}_{\gamma_{24}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{24}} + \vec{u}_{\gamma_{34}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{34}} = 0 \quad \text{sur } T. \quad (3.15)$$

4 Décomposition de domaine pour le traitement des fractures

Nous avons choisi de représenter les fractures par des interfaces entre les différentes parties du milieu poreux, et nous avons considéré la décomposition naturelle de Ω comme une partition en sous-domaines pour résoudre le problème posé par une méthode de décomposition de domaine. Pour cela, nous éliminons les inconnues \vec{u}_i , et p_i à l'intérieur de chaque sous-domaine, pour nous ramener à un problème posé sur l'ensemble des interfaces.

Pour nous ramener à un problème posé sur l'interface $\gamma = \cup_{(i,j) \in \tilde{S}} \gamma_{ij}$, nous introduisons dans chaque sous domaine Ω_i , l'opérateur de Steklov-Poincaré \mathcal{S}_i tel que

$$\mathcal{S}_i(\lambda) = (\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i)(\lambda, 0, 0)$$

ainsi que

$$\chi_i(f_i, p_{di}) = (\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i)(0, f_i, p_{di}),$$

où $(\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i)(\mu, g, \phi)$ est $\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i$ pour (\vec{u}_i, p_i) la solution du problème (3.5)–(3.9) sur le sous domaine Ω_i avec $p_{\gamma_{ij}} = \mu$, $f_i = g$ et $p_{di} = \phi$.

Les conditions sur les fractures (3.10)–(3.14) conduisent alors au système sur l'interface globale γ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \mathcal{S}_i(\lambda) - \operatorname{div}_\gamma(dK_\gamma \vec{\nabla}_\gamma \lambda) &= f_\gamma + \sum_{i=1}^4 \chi_i(f_i, p_{di}) && \text{sur } \gamma \\ \lambda &= p_{d\gamma} && \text{sur } \partial\gamma \cap \partial\Omega \\ \lambda - \lambda_T &= 0 && \text{sur } \partial\gamma \cap T \\ \mathcal{S}_T(\lambda) &= 0 && \text{sur } T, \end{aligned}$$

dont l'inconnue est $\lambda = (\lambda_{\gamma_{12}}, \lambda_{\gamma_{23}}, \lambda_{\gamma_{24}}, \lambda_{\gamma_{34}}, \lambda_T)$ la pression sur l'interface globale. Ici λ_T représente la pression sur l'intersection T. $\mathcal{S}_T(\lambda) = (\vec{u}_{\gamma_{23}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{23}} + \vec{u}_{\gamma_{24}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{24}} + \vec{u}_{\gamma_{34}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{34}})(\lambda)$, $\mathcal{S}_T(\lambda) = 0$ représente la continuité du flux imposée sur T dans l'équation (3.15).

Dans ce problème les équations sur les interfaces possèdent un terme supplémentaire (le terme $-\operatorname{div}_\gamma(dK_\gamma \vec{\nabla}_\gamma \lambda)$) par rapport à ce qu'on obtient en résolvant un problème global par décomposition de domaines en l'absence de fracture et ce terme modélise l'écoulement dans les fractures.

Ce système est symétrique défini positif, nous proposons une méthode de gradient conjugué pour sa résolution. Chaque itération demande la résolution d'un problème de Dirichlet dans chaque sous-domaine, ainsi qu'un calcul d'écoulement dans la fracture.

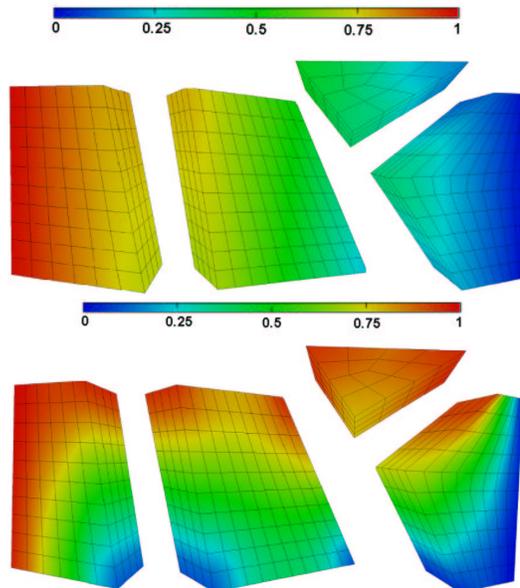
Pour accélérer la convergence de la méthode itérative, il est essentiel d'introduire un préconditionneur. Dans les problèmes sans fractures, pour la méthode de décomposition de domaine classique, le préconditionneur de Neumann–Neumann a prouvé son efficacité [8]. Il revient à inverser chacun des opérateurs S_i localement, et il demande la résolution d'un problème de Neumann sur chaque sous-domaine. Par contre, en comparant les ordres différentiels des différents opérateurs du système sur l'interface globale, il est naturel de prendre comme préconditionneur l'inverse de l'opérateur d'écoulement sur la fracture, qui est d'ordre 2, alors que les opérateurs de Steklov–Poincaré sont seulement d'ordre 1. En fonction de la grandeur de dK_γ , l'un ou l'autre de ces préconditionneurs, ou une combinaison pourrait se révéler efficace.

5 Résultats numériques

5.1 Le cas test : écoulement horizontal

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats numériques pour illustrer les propriétés du modèle présenté dans cet article. Le modèle a été étudié à partir d'un jeu de données, et d'un ensemble de tests qui a permis d'avoir un premier aperçu de la performance de l'algorithme de décomposition de domaine avec fractures. Nous présentons un exemple de résultat sans et avec fractures, en imposant un gradient de pression horizontal : on impose $p = 1$ sur le bord latéral gauche et $p = 0$ sur le bord latéral droit et une condition de flux nul sur le reste du bord. On a imposé une pression égale à 1 sur les extrémités en haut des fractures et une pression égale à 0 sur celles en bas des fractures. Dans tout le domaine, on a imposé une perméabilité égale à 1 partout sauf sur les fractures où on choisit une perméabilité beaucoup plus élevée (la perméabilité dans la fracture multipliée par son épaisseur est égale à 100).

La figure à droite présente le champ de pression en l'absence de fissures (Nous avons représenté chaque sous-domaine séparément). Comme on peut s'y attendre, l'écoulement est uniquement horizontal, la pression varie linéairement de gauche à droite.

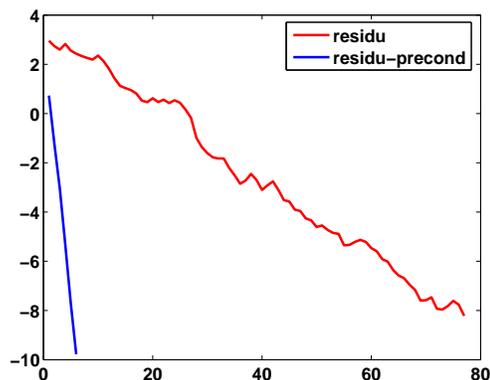


Si l'on prend en compte les fractures, la situation change, comme le montre la figure à droite. On voit en plus de l'écoulement horizontal, un effet visible d'écoulement dans les fractures.

5.2 Performance du préconditionneur

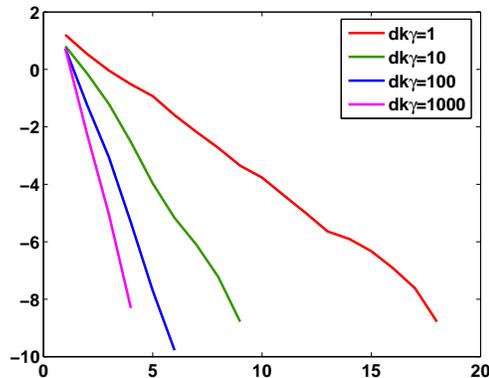
Dans un premier cas test, on a fait fonctionner l'algorithme de gradient conjugué sur un cas de décomposition de domaine avec fractures sans et avec préconditionnement par l'inverse de l'opérateur d'écoulement dans les fractures. La figure à droite présente les résultats obtenus (le résidu en fonction du nombre d'itérations).

Sans préconditionnement la méthode du gradient conjugué converge lentement, mais avec préconditionnement, on remarque une amélioration dramatique de la convergence, le nombre des itérations à la convergence est divisé par 10 en utilisant le préconditionneur.



Dans un deuxième cas test, on a fait fonctionner l'algorithme avec fractures en préconditionnant par l'inverse de l'opérateur d'écoulement dans les fractures en faisant varier la valeur de dK_γ . La figure à droite présente les résultats obtenus (le résidu en fonction du nombre d'itérations). Le préconditionneur fonctionne mieux quand la valeur de dK_γ est grande.

Ces cas tests montrent bien l'utilité et l'efficacité du préconditionnement par l'inverse de l'opérateur d'écoulement dans les fractures. D'autres cas tests de ce préconditionneur montrant l'effet du raffinement du maillage seront présentés lors de la conférence.



6 Conclusion

On a présenté dans cet article un modèle d'écoulement dans un milieu poreux en dimension 3 avec des grandes fractures qui prend en compte l'intersection des fractures. Dans ce modèle, on a assimilé les fractures, qui sont supposées être beaucoup plus perméables que le milieu alentour, à des interfaces à travers lesquelles la pression est continue mais le flux est discontinu. On a reformulé le modèle par une méthode de décomposition de domaine afin de se ramener à un problème posé sur l'ensemble des interfaces. L'utilisation d'une méthode itérative pour la résolution du système à l'interface globale exige l'étude et le test d'un préconditionneur. Nous étendrons ce travail au cas du transport de solutés. Nous envisageons aussi comme suite à ce travail l'extension de l'étude au modèle développé dans [7] qui traite aussi les fractures moins perméables, et au cas du maillage nonconforme en utilisant la méthode d'éléments de mortier [4]

Références

- [1] C. Alboin, J. Jaffré, and J. E. Roberts. Domain decomposition for flow in fractured porous media. In *Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering*, pages 365–373, Bergen, 1999. Domain Decomposition Press.
- [2] C. Alboin, J. Jaffré, J. E. Roberts, and C. Serres. Modeling fractures as interfaces for flow and transport in porous media. *Contemporary Mathematics*, 295 :13–24, 2002.
- [3] L. Amir, M. Kern, V. Martin, and J. E. Roberts. Preconditioner for a model of flow in a fractured porous medium. en préparation.
- [4] C. Bernardi, Y. Maladay, and A.T. Patera. Domain decomposition by mortar element method, 1992.
- [5] J. Douglas, T. Arbogast, and U. Hornung. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal.*, pages 823–836, 1990. Vol. 21.
- [6] Jr. J. Douglas and T. Arbogast. Dual porosity models for flow in naturally fractured reservoirs. In J. H. Cushman (ed.), editor, *Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Formations*, pages 177–221. Academic Press, 1990.
- [7] V. Martin, J. Jaffré, and J. E. Roberts. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, to appear.
- [8] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Advances*, pages pp. 122–220, 1994. Vol. 1, No 2.