

Décomposition de domaine pour un milieu poreux fracturé

Laila AMIR ¹, Michel KERN ², Vincent MARTIN ³, Jean E ROBERTS ⁴

¹ INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex
Email: laila.amir@inria.fr

² INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex
Email: Michel.Kern@inria.fr

³ Politecnico di Milano, Via Bonardi, 9, 20133 MILANO, ITALIA
Email: vincent.martin@mate.polimi.it

⁴ INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex
Email: jean.roberts@inria.fr

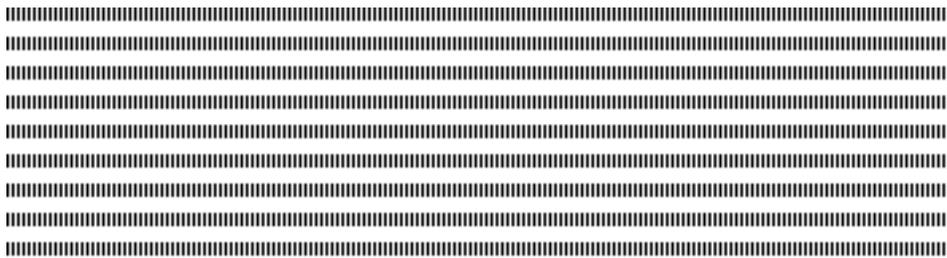
.....
RÉSUMÉ. Dans cet article, nous nous intéressons à la modélisation d'écoulement d'un fluide monophasique dans un milieu poreux faillé en utilisant les méthodes de décomposition de domaine. On doit résoudre un problème d'interface non standard qui prend en compte l'écoulement dans les fractures. Dans l'approche proposée, la fracture est considérée comme une interface active, les conditions de transmission et les échanges entre la roche et la fracture font intervenir les propriétés de l'écoulement dans la fracture.

ABSTRACT. In this paper, we are interested in modeling the flow of a single phase fluid in a porous medium with fractures, using domain decomposition methods.

In the proposed approach, the fracture is regarded as an active interface, the transmission conditions and the exchanges between the rock and the fracture taking into account the flow in the fracture. We then have to solve a non standard interface problem which takes into account the flow in the fractures.

MOTS-CLÉS : fractures, milieu poreux, décomposition de domaine, écoulement, interface, conditions de transmission

KEYWORDS : fractures, porous medium, domain decomposition, flux, interface, transmission conditions



1. Introduction

Les milieux poreux sont généralement hétérogènes, en partie à cause de la présence de fractures qui peuvent jouer un rôle hydraulique en contribuant de manière considérable à la capacité des sols à transporter l'eau et les polluants ; ceci explique qu'il est important de modéliser les fractures et les prendre en compte lors d'une simulation d'écoulement dans un milieu poreux fracturé.

On peut distinguer entre deux types de fractures : les grandes fractures qui représentent des discontinuités géologiques, et qui sont en générale beaucoup plus perméables que le milieu ambiant, devenant des canaux privilégiés pour l'écoulement, ou au contraire (moins perméables) représentent des barrières géologiques. Le deuxième type de fracture est celui de petites fractures qui apparaissent en grand nombre dans le milieu formant un réseau des fissures, dont les localisations précises sont difficiles à déterminer [3], [4].

Divers travaux et modèles traitent le problème des fractures suivant ses différentes types. Une approche s'appuie sur le raffinement local du maillage au niveau de la fracture [2]. Un autre modèle, présenté dans [1], et dont cet article s'inspire, consiste à assimiler une fracture de grande perméabilité à une interface, et à traiter le problème résultant par une méthode de décomposition de domaine. Dans ce modèle, l'originalité repose sur le traitement de l'interface à travers laquelle la pression est continue mais le flux est discontinu. Ce modèle est généralisé au cas de fractures moins perméable dans [5], couplant sur l'interface sauts de pression et sauts de vitesse normale. Ces deux derniers modèles sont étudiés théoriquement et numériquement en 2D avec des fractures régulières et perpendiculaire à la direction d'écoulement. Dans notre travail, nous allons généraliser ces études au cas 3D, avec des fractures plus perméables, qui peuvent s'intersecter et qui forment un angle quelconque avec la perpendiculaire à la direction d'écoulement.

2. Équations d'écoulement

Dans un milieu poreux Ω , on considère un fluide monophasique incompressible dont l'écoulement est indépendant du temps, régi par deux lois :

- la loi de conservation de masse ;

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad [1]$$

avec \vec{u} la vitesse de Darcy et f le terme source,

- et la loi de Darcy ;

$$\vec{u} = -K \vec{\nabla} P \text{ dans } \Omega, \quad [2]$$

où P est la pression, et K est le tenseur de perméabilité.

On ajoute des conditions aux limites qui peuvent être :

$$P = P_d \text{ dans } \partial\Omega_D \quad [3]$$

et

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_N, \quad [4]$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ forment une partition de $\partial\Omega$, et $\vec{\nu}$ est la normale unitaire sortante à Ω .

3. Problème modèle avec les fractures

On prend comme problème modèle un domaine géologique Ω de dimension 3, subdivisés en quatre sous-domaines Ω_i , $i=1, \dots, 4$, naturellement séparés par des fractures. La figure (1) présente le type de configurations auquel on s'intéresse.

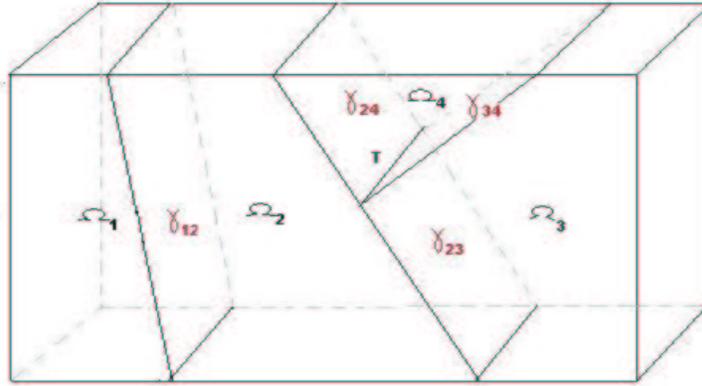


Figure 1. Géométrie du domaine de calcul

Les fractures (γ_{12} , γ_{23} , γ_{24} , γ_{34}) sont aussi des milieux poreux, plus perméables, mais leur dimension transverse est supposée plus petite que les deux autres, et elles sont assimilées à des interfaces (sans épaisseur, bien que l'épaisseur intervienne dans la loi de Darcy sur la fissure) :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^4 \bar{\Omega}_i,$$

$$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \gamma_{ij} \text{ pour tout } i, j \in I = 1, 2, 3, 4,$$

$$\Gamma_{Di} = \partial\Omega_D \cap \partial\Omega_i \text{ et } \Gamma_{Ni} = \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_i \text{ pour tout } i \in I = 1, 2, 3, 4.$$

Sur chaque sous domaine Ω_i , on retrouve les équations d'écoulement usuelles (5), (6) :

$$\operatorname{div}_i(\vec{u}_i) = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \quad [5]$$

$$\vec{u}_i = -K_i \vec{\nabla} P_i \quad \text{dans } \Omega_i \quad [6]$$

$$P_i = P_{Di} \quad \text{dans } \Gamma_{Di} \quad [7]$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i = 0 \quad \text{dans } \Gamma_{Ni} \quad [8]$$

$$P_i = P_{\gamma_{ij}} \quad \text{dans } \gamma_{ij}. \quad [9]$$

L'équation (9) représente la continuité de la pression à travers la fracture γ_{ij} et sur chaque interface γ_{ij} , des lois analogues sont valides (10), (11) :

$$\operatorname{div}_{\gamma_{ij}}(\vec{u}_{\gamma_{ij}}) = f_{\gamma_{ij}} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i + \vec{u}_j \cdot \vec{\nu}_j) \quad \text{dans } \gamma_{ij} \quad [10]$$

$$\vec{u}_{\gamma_{ij}} = -d_{ij} K_{\gamma_{ij}} \vec{\nabla}_{\gamma_{ij}} P_{\gamma_{ij}} \quad \text{dans } \gamma_{ij} \quad [11]$$

$$P_{\gamma_{ij}} = P_{d_{ij}\gamma_{ij}} \quad \text{dans } \partial\gamma_{ij} \cap \partial\Omega_D \quad [12]$$

$$\vec{u}_{\gamma_{ij}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{dans } \partial\gamma_{ij} \cap \partial\Omega_N, \quad [13]$$

où d_{ij} est l'épaisseur de la fracture γ_{ij} , et où le terme source $(\vec{u}_i \cdot \vec{\nu}_i + \vec{u}_j \cdot \vec{\nu}_j)$ représente la contribution du flux des sous-domaines au flux de la fracture. Les deux opérateurs $\operatorname{div}_{\gamma_{ij}}$ et $\nabla_{\gamma_{ij}}$ sont, respectivement, la divergence et le gradient surfaciques.

Nous avons besoin d'une condition particulière au niveau de l'intersection des interfaces $T = \gamma_{23} \cap \gamma_{24} \cap \gamma_{34}$. Nous imposerons la continuité de la pression et du flux :

$$P_{\gamma_{23}} = P_{\gamma_{24}} = P_{\gamma_{34}} = P_T \quad \text{sur } T \quad [14]$$

$$\vec{u}_{\gamma_{23}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{23}} + \vec{u}_{\gamma_{24}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{24}} + \vec{u}_{\gamma_{34}} \cdot \vec{\nu}_{\gamma_{34}} = 0 \quad \text{sur } T \quad [15]$$

4. Décomposition de domaine pour le traitement des fractures

Dans la mesure où nous avons choisi de représenter les fractures par des interfaces entre les différentes parties du milieu poreux, il est naturel de résoudre le problème posé au paragraphe précédent par une méthode de décomposition de domaine. Pour cela, nous éliminons les inconnues \vec{u}_i , et P_i à l'intérieur de chaque sous-domaine, pour nous ramener à un problème posé sur l'ensemble des interfaces. Numériquement, nous utilisons une méthode d'éléments finis mixtes-hybrides, qui ont fait leurs preuves pour approcher les équations d'écoulement en milieu poreux.

Plus précisément, nous introduisons dans chaque sous domaine Ω_i , l'opérateur de Steklov-Poincaré \mathcal{S}_i tel que

$$\mathcal{S}_i(\lambda) = (\vec{u}_i \cdot \vec{v}_i)(\lambda, 0, 0)$$

ainsi que

$$\chi_i(f_i) = (\vec{u}_i \cdot \vec{v}_i)(0, f_i, P_{di}),$$

où $(\vec{u}_i \cdot \vec{v}_i)(\mu, g, \phi)$ est $\vec{u}_i \cdot \vec{v}_i$ pour (\vec{u}_i, P_i) la solution du problème (5)–(9) sur le sous domaine Ω_i avec $P_{\gamma_{ij}} = \mu$, $f_i = g$ et $P_{di} = \phi$.

Les conditions sur les fractures (10)–(13) conduisent alors au système sur l'interface :

$$\sum_{i=1}^4 \mathcal{S}_i(\lambda) - \operatorname{div}(-d K_\gamma \vec{\nabla} \lambda) = -f_\gamma - \sum_{i=1}^4 \chi_i(f_i) \quad [16]$$

dont l'inconnue est λ la pression sur l'interface globale.

Ce problème possède un terme supplémentaire (le terme $\operatorname{div}(-d K_\gamma \vec{\nabla} \lambda)$) par rapport à celui que l'on obtient en résolvant un problème global par décomposition de domaines en l'absence de fracture. Ce terme représente l'écoulement dans la fracture.

Ce système est symétrique, nous proposons une méthode itérative du gradient conjugué généralisé pour sa résolution. Chaque itération demande la résolution d'un problème de Dirichlet dans chaque sous-domaine, ainsi que l'évaluation de l'écoulement dans la fracture.

Pour accélérer la convergence de la méthode itérative, il est essentiel d'introduire un préconditionneur. Dans le cas des méthodes de décomposition de domaine, le préconditionneur de Neumann–Neumann a prouvé son efficacité [6]. Il revient à inverser chacun des opérateurs \mathcal{S}_i localement, et demande la résolution d'un problème de Neumann sur chaque sous-domaine. Par contre, en comparant les ordres différentiels des différents opérateurs de (16), il est naturel de prendre comme préconditionneur l'inverse de l'opérateur d'écoulement sur la fracture, qui est d'ordre 2, alors que les opérateurs de Steklov–Poincaré sont seulement d'ordre 1. En fonction de la grandeur de la conductivité K_γ , l'un ou l'autre de ces préconditionneurs, ou une combinaison pourrait se révéler efficace.

Nous présentons sur la figure 2, un exemple de résultat obtenu sans prendre en compte l'écoulement dans les fractures, en imposant un gradient de pression verticale et sur la figure 3, un exemple de résultat qui prend en compte l'écoulement dans la fracture γ_{12} plus perméable en imposant un gradient de pression horizontale.

Nous présenterons des résultats sur le modèle complet lors de la conférence.

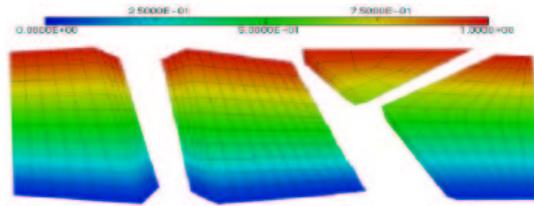


Figure 2. Pression dans chaque sous domaine

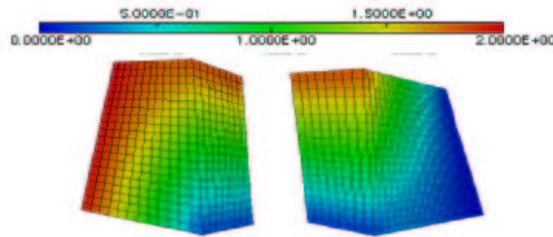


Figure 3. La pression donnée par le modèle : $dK_f = 10$

5. Bibliographie

- [1] **C. Alboin, J. Jaffré et J. E. Roberts.** – Domain decomposition for flow in fractured porous media. - In : *Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering*, Domain Decomposition Press, pp. 365-373, - Bergen, 1999.
- [2] **C. Bernardi, Y. Maladay et A.T. Patera** Domain Decomposition by mortar element method – Technical report, Publications du laboratoire d’analyse numérique de l’université de Pierre et Marie Curie, R92013, juin 1992.
- [3] **J. Douglas, Jr. et T. Arbogast** Dual porosity models for flow in naturally fractured reservoirs, In : *Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Formations*, J. H. Cushman (ed.), Academic Press, 1990, pp. 177-221.
- [4] **J. Douglas, T. Arbogast et U. Hornung** Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, In : *SIAM J. Math. Anal.*, (1990) 21 823-836.
- [5] **V. Martin, J. Jaffré, J. E. Roberts** – Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. Accepted for publication In : *SIAM Journal on Scientific Computing (SISC)*, INRIA Research Report, No 4848, Juin 2003.
- [6] **A. Toselli, O. Windlund** Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory, vol. 34, Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2004.
- [7] **C. Alboin and J. Jaffré and J. E. Roberts and C. Serres,** – Modeling Fractures as Interfaces for Flow and Transport in Porous Media, - In : *Contemporary Mathematics*, Volume 295, pp. 13-24, 2002