Problèmes linéaires en dimension finie

On veut résoudre $Ax = y$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$x \in \mathbb{R}^{n}$

$y \in \mathbb{R}^{m}$.

Existence ? Unicité ? Stabilité de la solution ?

1) Etude générale

① Existence d'une solution ssi $y \in \operatorname{Im} A$

② Unicité ssi A est injective

càd $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

(dans ce cas, nécessairement $m \geq n$).

③ Stabilité ?

Supposons que $A : \underbrace{\mathbb{R}^m}_{E} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m}_{F}$ est inversible

Si $Ax = y$ est perturbé en $A(x+\delta x) = y + \delta y$

Comparons $\dfrac{\|\delta x\|_E}{\|x\|_E}$ et $\dfrac{\|\delta y\|_F}{\|y\|_F}$

$$\begin{cases} Ax = y \\ A\delta x = \delta y \end{cases} \iff \begin{cases} Ax = y \\ \delta x = A^{-1}\delta y \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \|y\|_F \leq \|A\|_{E\to F} \, \|x\|_E \\ \|\delta x\|_E \leq \|A^{-1}\|_{F\to E} \, \|\delta y\|_F \end{cases}$$

où

$$\|A\|_{E\to F} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_F}{\|z\|_E} = \sup_{\|z\|_E=1} \|Az\|_F$$
$$= \sup_{\|z\|_E\leq 1} \|Az\|_F$$

$$\|A^{-1}\|_{F\to E} = \sup_{w\neq 0} \frac{\|A^{-1}w\|_E}{\|w\|_F}.$$

Par suite $\frac{\|\delta x\|_E}{\|x\|_E} \leq \underbrace{\left(\|A\|_{E\to F} \, \|A^{-1}\|_{F\to E}\right)}_{K(A)} \frac{\|\delta y\|_F}{\|y\|_F}$

Prop: Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ inversible, alors $\forall x, y, \delta x, \delta y$ tels que $Ax = y$

$A(x+\delta x) = y + \delta y$

$$\frac{\|\delta x\|_E}{\|x\|_E} \underset{=}{\boxed{\leq}} K_{E\to F}(A) \frac{\|\delta y\|_F}{\|y\|_F}$$

où $K_{E\to F}(A) = \|A\|_{E\to F} \, \|A^{-1}\|_{F\to E}$.

De plus, cette inégalité est optimale.

démo : En dimension finie, la sphère unité est compacte (ici fermé borné) donc $\exists x \in E$, $\|x\| = 1$ tq $\|Ax\|_F = \sup_{\|x'\|_E = 1} \|Ax'\|_F$

$$= \|A\|_{E \to F}$$

$\exists \delta y \in F$, $\|\delta y\|_F = 1$ tq $\|A^{-1}\delta y\|_E = \sup_{\|\delta y'\| = 1} \|A^{-1}\delta y'\|$

$$= \|A^{-1}\|_{F \to E}$$

On a alors $\dfrac{\|\delta x\|_E}{\|x\|_E} = K(A) \dfrac{\|\delta y\|_F}{\|y\|_F}$

en posant $y = Ax$ et $\delta x = A^{-1}\delta y$.

cqfd

<u>Interprétation</u> : $\log_{10} K(A) \simeq$ le nombre de chiffres significatifs qu'on perd en résolvant le système.

$y = k \cdot 10^m + r \longrightarrow r < 10^m$

Prop: Pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible

1) $K(A) \geq 1$
2) $K_{E\to F}(A) = K_{F\to A}(A^{-1})$
3) $K(\alpha A) = K(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

démo (1) : $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

car $\underbrace{\sup_{\|x\|\leq 1} \|AB(x)\|}_{\|AB\|} \leq \|A\|\,\|B(x)\| \leq \|A\|\,\|B\|\,\cancel{\|x\|}$

Pour $B = A^{-1}$ $\quad \underbrace{\|I\|}_{1} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|$ cqfd

Rque: Le conditionnement dépend du choix des normes.

En général on choisit $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_F$

Le cas le plus facile à étudier est la norme 2.

Rque : le conditionnement intervient en optimisation

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

$$x^{k+1} = x^k - t^k \nabla f(x^k)$$

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq \underbrace{F(k)}_{\cancel{C\left(\frac{K(A)-1}{K(A)+1}\right)^k}} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

2) Cas de la norme 2

On choisit $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_F = \|\cdot\|_2$

On notera $K_2(A)$.

Rque : - Si A est orthogonale $(A^TA = I)$
alors $K_2(A) = 1$.

- Si U est orthogonale ($U^{+}U = I$)
alors $K_2(UA) = K_2(AU) = K_2(A)$.

Dans le cas général on s'appuie sur la décomposition en valeurs singulières.

Théorème : Soit $A \in R^{m\times n}$.
Alors il existe $U \in R^{m\times m}$ et $V \in R^{n\times n}$ orthogonales ($U^TU = I$ et $V^TV = I$)
et $\Sigma \in R^{m\times n}$ telles que

$$A = U\Sigma V^T \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

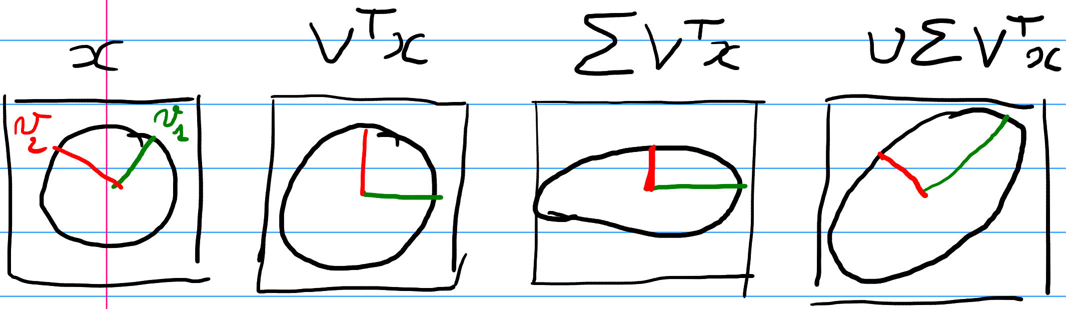
$$\text{et} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Les vecteurs $u_1, \dots, u_m$ tels que $U = \left(u_1 \vdots \dots \vdots u_m \right)$

sont les vecteurs singuliers à gauche

——— $v_1, \dots, v_n$ tels que $V = \left(v_1 \vdots \dots \vdots v_n \right)$

sont les vecteurs singuliers à droite



démo : La matrice $A^T A$ est symétrique donc diagonalisable en BON.

Soient $\begin{cases} v_1, \dots, v_n & \text{les vecteurs propres} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n & \text{valeurs} \end{cases}$

On a $A^TA = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} V^T$

De plus A^TA est positive :

$\forall x \quad x^TA^TAx = \|Ax\|^2 \geq 0$

donc les λ_i sont ≥ 0.

On peut supposer que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \underset{\overset{\uparrow}{\lambda_r}}{\dots} \underbrace{\geq \lambda_m}_{=0}$$

On pose $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ et $u_i = \dfrac{Av_i}{\sigma_i}$ pour $1 \leq i \leq r$

Alors $\|u_i\|^2 = \dfrac{v_i^T A^TA v_i}{\sigma_i^2} = \dfrac{\lambda_i}{\sigma_i^2}\|v_i\|^2 = 1$.

$$u_i^T u_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

On complète les $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$ en une BON de $\mathbb{R}^m$.

cqfd

$$A = \left(\overbrace{u_1 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; u_r}^{\text{Base de Im}A} \;\Big|\; u_{r+1} \;\cdots\; \vdots\; u_m \right) \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow m-r \end{array} \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{matrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{matrix} \right. & \left. \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right) \\ \left(\begin{matrix} 0 \end{matrix} \right. & \left. \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right) \end{array} \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right] \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Base de Ker}A \\ \qquad\qquad\quad \shortparallel \\ \qquad\qquad \text{Ker}A^TA \end{array}$$

Prop: Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible

Alors $\boxed{K_2(A) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}}$

démo : Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\|_2^2 = x^T V \Sigma^T U^T \cancel{U} \Sigma V^T$$

$$= \|\Sigma V^T x\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 w_i^2 \quad \text{où } w = V^T x$$

$$\leq \sigma_1^2 \|w\|^2 = \sigma_1^2 \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = v_1$.

Donc

$$\|A\| = \sigma_1 .$$

De même $A^{-1} = V\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)\right) U^T$

est une SVD de A^{-1}

donc $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$ cqfd

Rque: Le rapport $\frac{\sigma_1}{\sigma_r}$ a aussi du sens pour des matrices rectangulaires :

c'est le conditionnement de

$$P_{\mathrm{Im}\,A} A|_{(\mathrm{Ker}\,A)^\perp} .$$

3) Résolution à l'aide de la SVD

1er cas : Si $y \in \operatorname{Im} A$ (mais A pas nécessairt surjective)

Résolvons

$$Ax = y \iff \cancel{U}(\Sigma V^T x) = \cancel{U}(U^T y)$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^T x \\ \vdots \\ \sigma_r v_r^T x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T y \\ \vdots \\ u_r^T y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } y \in \operatorname{Im} A$$

$$\iff \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \langle v_i, x \rangle = \frac{\langle u_i, y \rangle}{\sigma_i}$$

Si $r < n$, il y a une infinité de solutions toutes de la forme

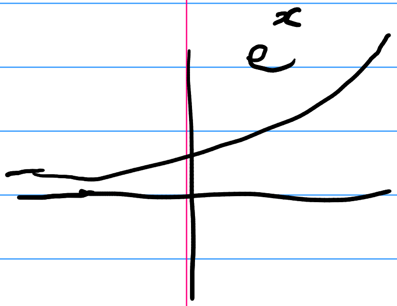
$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle u_i, y \rangle}{\sigma_i} v_i}_{x^*} + \underbrace{x_0}_{\in \operatorname{Ker} A}$$

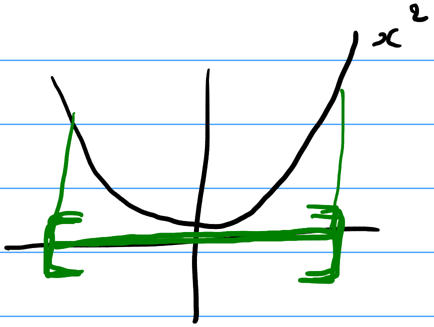
x^* est la solution de norme minimale

$$\|x\|^2 = \|x^*\|^2 + \underbrace{\|x_0\|^2}_{\geq 0} .$$

2ème cas : si $y \notin \operatorname{Im} A$ on peut chercher une solution approchée.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2$$





$$\|Ax - y\|^2 = \|U(\Sigma V^T x) - U(U^T y)\|^2$$

$$= \|\Sigma V^T x - U^T y\|^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} |\sigma_i \langle v_i, x\rangle - \langle u_i, y\rangle|^2} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{m} |\langle u_i, y\rangle|^2}_{Cte}$$

Le minimum est atteint pour

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle u_i, y\rangle}{\sigma_i} v_i + \underbrace{x_0}_{\in \operatorname{Ker} A}$$

$$= \underbrace{V \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sigma_r & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} U^T}_{\text{Pseudo-inverse de } A} y + x_0$$

ou inverse de Moore Penrose

A^+

$$A^+A = V \begin{pmatrix} 1/\sigma_i & \\ & \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \ddots \end{pmatrix} V^T$$

$$= V \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} V^T = \text{projection sur}$$

sur $(\operatorname{Ker} A)^\perp$

Exercices

Exercice 1

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + b \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Rappel : bien posé $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{existence} \\ \text{unicité} \\ \text{stabilité} \end{cases}$

Il s'agit d'une ED à coeff constants
Elle se résout en

$$x(t) = x_0 e^{at} + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)$$

Il y a existence et unicité.
x dépend continûment de x_0 car

$$\left|x(t) - \tilde{x}(t)\right| = \left|x_0 - \tilde{x}_0\right| e^{at}$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq |x_0 - \tilde{x}_0| e^{a} .$$

Donc c'est bien posé.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

⚠ $\dot{x} = F(x)$ avec F pas C^1
mais continue

On pose $x(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} t\right)^2 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} = \sqrt{|x(t)|}$$

On pose $\tilde{x}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2 & \text{pour } t \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{pour } t \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} = \sqrt{|x(t)|}$$

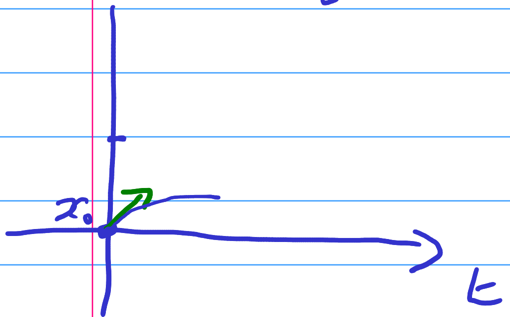
On a $x(0) = \tilde{x}(0)$

donc il n'y a pas unicité.

$\longrightarrow$ MAL POSÉ

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$x_0 = 0$



$\exists\, t > 0$ tel que $x(t) > x_0$

Mais dans l'intervalle $]x_0, x(t)[$

il existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

il existe t_s tel que $x(t_s) = s$

Mais alors $\dot{x}(t_s) = g(x(t_s)) = g(s) = 0$

Par le théorème de Darboux, $\dot{x}$ doit prendre toutes les valeurs entre $\overset{\dot{x}(0)}{\overset{\shortparallel}{0}}$ et $\underset{\dot{x}(t_1)}{\underset{\shortparallel}{1}}$.

Donc il n'y a pas existence !

MAL POSÉ !