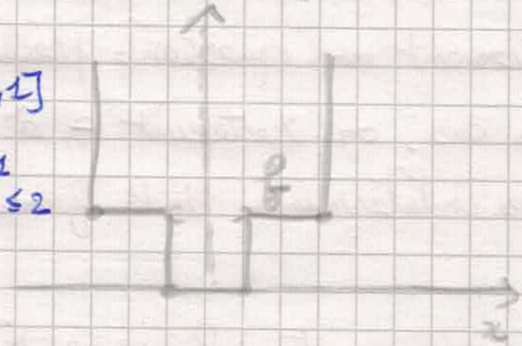
Fiche n°2 Fonctions convexes

Exercice 1

On pose $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [-1,1] \\ 1 & \text{pour } -2 \leq x < 1 \\ & \text{et } 1 < x \leq 2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$



On a bien $\{f \leq t\}$ convexe pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais f n'est pas convexe.

Exercice 4

1) Soit $\theta \in [0,1]$ et $x, y \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom}(\alpha f)$.

Par convexité de f, $\quad f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$

d'où $\quad \alpha f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta(\alpha f)(x) + (1-\theta)(\alpha f)(y)$

puisque $\alpha > 0$.

Donc αf est convexe.

2) Soient $\theta \in [0,1]$ et $x, y \in \operatorname{dom}(f_1 + f_2) = \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2)$.

On a $$f_1(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f_1(x) + (1-\theta) f_1(y)$$
$$f_2(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f_2(x) + (1-\theta) f_2(y).$$

Donc en sommant

$$(f_1 + f_2)(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta (f_1 + f_2)(x) + (1-\theta)(f_1 + f_2)(y).$$

Donc $f_1 + f_2$ est convexe.

3) Preuve par inégalité : Soient $\theta \in]0,1[$, $x, y \in \mathbb{R}^N$.

On a $\forall i \in I \quad f_i(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f_i(x) + (1-\theta) f_i(y) \leq \theta \sup_{i\in I} f_i(x) + (1-\theta) \sup_{i \in I} f_i(y)$

Donc en passant à la borne supérieure

$$\sup_{i \in I} f_i(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta \sup_{i\in I} f_i(x) + (1-\theta) \sup_{i\in I} f_i(y)$$

Donc $\sup_{i\in I} f_i$ est convexe.

Remarque : Ici, on n'a pas restreint x et y à appartenir à $\mathrm{dom}\, f$, contrairement aux questions précédentes.

Dans ce cas, on restreint θ à être dans $]0,1[$ pour éviter les formes indéterminées de la forme $\underbrace{\theta f(x)}_{0\times+\infty}$ ou $\underbrace{(1-\theta)f(y)}_{0\times+\infty}$

Moralité : pour montrer la convexité

① ou bien on prend $x, y \in \mathrm{dom}\, f_i$ et on peut choisir $\theta \in [0,1]$

② ou alors on prend x et y quelconques et on choisit $\theta \in]0,1[$

(de toutes façons, même dans le cas ① les valeurs $\theta = 0$ et $\theta = 1$ sont des inégalités triviales).

<u>Preuve par épigraphe</u> :

$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall r \in \mathbb{R},$

$$(x,r) \in \mathrm{epi}\left(\sup_{i\in I} f_i\right) \iff \sup_{i\in I} f_i(x) \leq r$$
$$\iff \forall i \in I,\ f_i(x) \leq r$$
$$\iff (x,r) \in \bigcap_{i\in I} (\mathrm{epi}(f_i))$$

Donc $\mathrm{epi}(\sup f_i)$ est convexe en tant qu'intersection de convexes.

Ainsi $\sup_{i\in I} f_i$ est convexe.

4) Soient $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ et $x_2, y_2 \in \mathbb{R}^{N_2}$. Soit $\theta \in]0,1[$.

Par convexité de f :

$$\underbrace{f(\theta x_1 + (1-\theta)y_1, \theta x_2 + (1-\theta)y_2)} \leq \theta f(x_1, x_2) + (1-\theta) f(y_1, y_2)$$

$$\inf_{z_2} f(\theta x_1 + (1-\theta)y_1, z_2) \leq$$

On passe à la borne inférieure en x_2 :

$$\inf_{z_2} f(\theta x_1 + (1-\theta)y_1, z_2) \leq \theta \inf_{x_2} f(x_1, x_2) + (1-\theta) f(y_1, y_2)$$

puis à la borne inférieure en y_2 :

$$\inf_{z_2} f(\theta x_1 + (1-\theta) y_1, z_2) \leq \theta \inf_{x_2} f(x_1, x_2) + (1-\theta) \inf_{y_2} f(y_1, y_2)$$

Donc $g : x_1 \longmapsto \inf_{x_2} f(x_1, x_2)$ est convexe.

5) Preuve par inégalité :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in]0,1[$,

$$f(A(\theta x + (1-\theta) y)) = f(\theta A x + (1-\theta) A y) \leq \theta f(Ax) + (1-\theta) f(Ay)$$

donc $g = f \circ A$ est convexe.

Preuve par épigraphe :

Soit $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

$$(x,r) \in \operatorname{epi} g \iff f(Ax) \leq r \iff (Ax, r) \in \operatorname{epi} f$$
$$\iff (x,r) \in \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}}(\operatorname{epi} f)$$

Donc epi g est l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire, c'est un convexe.

Donc g est convexe.

il s'agit d'une image réciproque et non d'un inverse

Exercice 6

1) Soient $y, y' \in B(x_0, \delta)$ tels que $y \neq y'$.

Si $y' = \theta y + (1-\theta) z$ avec $\theta \in [0,1]$ et $z \in B(x_0, 2\delta)$

alors $f(y') \leq \theta f(y) + (1-\theta) f(z)$

donc
$$f(y') - f(y) \leq (1-\theta)(f(z) - f(y))$$
$$\leq (1-\theta)(M - m). \qquad (*)$$

idée : choisissons z. On veut $z \in B(x_0, 2\delta)$ donc on prend $\|y'-z\| \leq \delta$

Posons $z = y' + \delta \dfrac{y'-y}{\|y'-y\|}$

de sorte que $y' = \theta y + (1-\theta) z$ avec $\theta = \dfrac{\delta/\|y'-y\|}{(1 + \delta/\|y'-y\|)} \in [0,1]$

et $\|x_0 - z\| \leq \|x_0 - y'\| + \|y' - z\|$
$< 2\delta$.

D'après $(*)$ on a donc
$$f(y') - f(y) \leq \frac{\|y'-y\|}{\|y'-y\| + \delta}(M-m)$$
$$\leq \|y'-y\| \frac{(M-m)}{\delta}.$$

En inversant les rôles de y et y' on obtient l'inégalité opposée

donc $|f(y') - f(y)| \leq \dfrac{(M-m)}{\delta} \|y'-y\|$

2) Soit $u_1, \dots, u_N$ une base de $\mathbb{R}^N$.

Posons $v_i = u_i + x_0$ pour $1 \leq i \leq N$

et $v_0 = -\sum_{i=1}^{N} u_i + x_0$

Quitte à remplacer $\{u_i\}_{1\leq i\leq N}$ par $\{\varepsilon u_i\}_{1\leq i\leq N}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit on peut supposer que $\{v_0, \dots, v_N\} \subset \mathrm{Int}(\mathrm{dom} f)$

(càd, ils sont dans une petite boule autour de x_0).

On a alors $x_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} v_i$, donc $x_0 \in \mathrm{conv}(v_0, \dots, v_N)$.

En fait $x_0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{conv}\{v_0, \dots, v_N\})$, voir l'exercice 8 de la feuille sur les ensembles convexes.

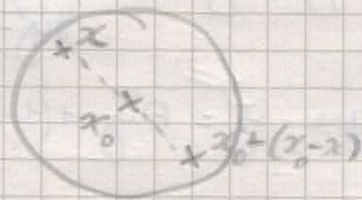
3) Pour tout $x \in \overline{B(x_0, 2\delta)}$, il existe $\theta_0, \dots, \theta_N \geq 0$ tels que $\sum_{i=0}^{N} \theta_i = 1$ ~~Alors~~ et $x = \sum_{i=0}^{N} \theta_i v_i$.

Alors par convexité : $f(x) \leq \sum_{i=0}^{N} \theta_i f(v_i) \leq \left(\sum \theta_i\right) \left(\max_{0 \leq i \leq N} v_i\right)$

$$= \left(\max_{0 \leq i \leq N} v_i\right) \overset{\text{def}}{=} M.$$

4) Pour $x \in \overline{B(x_0, 2\delta)}$, on a

$$x_0 = \frac{1}{2} \underbrace{x}_{\in \overline{B(x_0, 2\delta)}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(x_0 + (x_0 - x)\right)}_{\in \overline{B(x_0, 2\delta)}}$$



donc $f(x_0) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f\left(x_0 + (x_0 - x)\right)$

$$\leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} M$$

D'où $\quad f(x) \geq 2 f(x_0) - M$.

5) Les conditions de la question 1 sont vérifiées.

f est lipschitzienne donc continue sur $\overline{B(x_0, \delta)}$.

Exercice 7

On procède par double inclusion.

* Soit $p \in \partial f(x)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\underbrace{f(x+h)}_{= f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|)} \geq f(x) + \langle p, h \rangle$$

Donc $\forall h$, $\quad \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\|h\|) \leq \langle p, h \rangle$

~~ou encore $\forall h \neq 0$, $\left\langle \nabla f(x) - p, \frac{h}{\|h\|} \right\rangle \leq \underset{h\to 0}{o}(1)$~~

Prenons $h = t s$ avec $t > 0$ et $s \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$\cancel{t} \langle \nabla f(x) - p, s \rangle \leq \underset{t \to 0}{o}(\cancel{t}\|s\|)$$

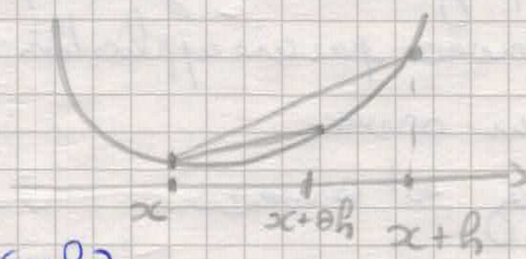
On fait $t \to 0^+$ et on obtient

$\forall s \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\quad \langle \nabla f(x) - p, s \rangle \leq 0$

Donc $\nabla f(x) - p = 0$. Ainsi $\partial f(x) \subset \{\nabla f(x)\}$.

(mais on ne sait pas encore que $\nabla f(x)$ est bien un sous gradient)

* Soit $h \in \mathbb{R}^N$, et $\theta \in]0,1[$.



$$f(x+\theta h) = f((1-\theta)x + \theta(x+h)) \leq (1-\theta) f(x) + \theta f(x+h).$$

Donc
$$f(x) + \underbrace{\frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta}}_{\xrightarrow{\theta \to 0^+} \langle \nabla f(x), h \rangle} \leq f(x+h)$$

d'où $\quad f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle \leq f(x+h)$.

Ceci est vrai pour tout h donc $\nabla f(x) \in \partial f(x)$.

Exercice 11 Posons $f(x) = \|x\|_p$

Soit $y \in \mathbb{R}^N$. On regarde $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\langle x, y \rangle - \|x\|_p \right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \langle x, y \rangle - \|x\|_p \leq \|x\|_p \left(\|y\|_q - 1 \right)$

Donc, . si $\|y\|_q \leq 1$, $\left(\langle x, y \rangle - \|x\|_p \right) \leq 0$

et il y a égalité pour $x = 0$.

D'où $f^*(y) = 0$.

. si $\|y\|_q > 1$

On sait qu'il y a égalité dans l'inégalité de Hölder ssi

$x = 0$ ou $y = 0$ ou $\begin{cases} \dfrac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \dfrac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \\ \text{sign}\, x_i = \text{sign}\, y_i \quad \text{pour } \overset{\text{tout}}{i} \text{ tel que } x_i \neq 0 \end{cases}$

On pose $x_i = \begin{cases} t \left(\dfrac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \right)^{\frac{1}{p}} \text{sign}(y_i) & \text{si } y_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où $t > 0$. Alors $\langle x, y \rangle - \|x\|_p = t\, C \left(\|y\|_q - 1 \right)$ où $C > 0$

et pour $t \to +\infty$, on obtient $\langle x, y \rangle - \|x\|_p \to +\infty$.

Ainsi $f^*(y) \overset{\sup}{=} +\infty$.

Conclusion: $f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\|_q \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 15

1). h est convexe (somme de fonctions convexes)

. $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et il existe $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

donc $(f+g)(x_0) < +\infty$.

Donc h est propre.

2) Soient $p \in \mathbb{R}^N$, $q \in \mathbb{R}^N$ tels que $p \in \partial f(x)$, $q \in \partial g(x)$:

$\forall y \in \mathbb{R}^N$ $\quad f(y) \geq f(x) + \langle p, y-x \rangle$

$\quad g(y) \geq g(x) + \langle q, y-x \rangle$

d'où $\quad (f+g)(y) \geq (f+g)(x) + \langle p+q, y-x \rangle$

$p+q$ est un sous-gradient de $f+g$. Donc $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$.

3) a) Puisque f et g sont convexes, s.c.i propres, on peut écrire

$$f = F^* \quad (\text{avec } F = f^*)$$
$$g = G^* \quad (\text{avec } G = g^*)$$

On remarque que $ri(\operatorname{dom} F^*) \cap ri(\operatorname{dom} G^*) \neq \emptyset$ et d'après l'exercice 14

$$f(x) + g(x) = F^*(x) + G^*(x) = H^*(x)$$

où $H(p) \overset{def}{=} \inf\{F(q) + G(p-q) \;/\; q \in \mathbb{R}^N\}$.

Ainsi $(f+g)^*(p) = H^{**}(p) = H(p)$

car H est convexe s.c.i propre d'après l'exercice 14.

D'où le résultat.

b) $p \in \partial h(x) \iff h(x) + h^*(p) = \langle p, x \rangle$

$$\iff f(x) + g(x) + \inf_q \{ f^*(q) + g^*(p-q) \} = \langle p, x \rangle$$

$$\overset{\text{l'inf sur } q \text{ est atteint}}{\iff} \underbrace{\left(f(x) + f^*(q) - \langle q, x \rangle \right)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\left(g(x) + g^*(p-q) - \langle p-q, x \rangle \right)}_{\geqslant 0} = 0$$

$$\iff \begin{cases} f(x) + f^*(q) = \langle q, x \rangle \\ g(x) + g^*(p-q) = \langle p-q, x \rangle \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q \in \partial f(x) \\ (p-q) \in \partial g(x) \end{cases}$$

$$\iff p \in \partial f(x) + \partial g(x).$$