Fiche n°1 Ensembles convexes

Exercice 1

1) Soit $\ell = \left(\liminf_{n\to+\infty} u_n\right) > -\infty$.

On a $\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) = \ell$ donc, à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$,

$\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) \geq \ell - 1$. (prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite)

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \underbrace{\min\left(\min_{0\leq k\leq N_0-1} u_k \,,\ \ell-1\right)}_{\overset{def}{=} m}$

2) a) * Pour $\ell \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$.

En particulier, pour $n \geq N_0 \quad \ell - \varepsilon \leq \inf_{k\geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon$.

Ce qui signifie $\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) = \ell$.

* Pour $\ell = -\infty$

$\forall A > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad u_n \leq -A$.

Donc pour $n \geq N_0 \quad \inf_{k\geq n} u_k \leq -A$

Ce qui signifie $\lim\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) = -\infty$.

* Pour $\ell = +\infty$

$\forall A > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad u_n \geq A$.

Alors pour $n \geq N_0 \quad \inf_{k\geq n} u_k \geq A$

D'où $\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) = +\infty$.

2) b) Si $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

La fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq n$.

(Attention, on utilise le fait que $\varphi : \underline{\underline{\mathbb{N}}} \to \underline{\underline{\mathbb{N}}}$)

Ainsi $\inf_{k\geq n} u_k \leq u_{\varphi(n)}$ et en passant à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{k\geq n} u_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

c) * Cas où $\ell = \liminf_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$:

Posons $\varphi(0) = 0$. Supposons, par récurrence, que $\varphi(0), \dots, \varphi(m-1)$ ont été définies, pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Alors, on construit $\varphi(m)$ de la manière suivante.

Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N_0$ $\ell - \frac{1}{m} \leq \inf_{k\geq n} u_k \leq \ell + \frac{1}{m}$.

~~Par définition de la borne inférieure~~,

On fixe $n \geq \max(N_0, \varphi(m-1))$. Par définition de la borne inférieure, il existe $k \geq n$ tel que $u_k \leq \ell + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$.

Posons $\varphi(m) = k$, on a ainsi

$$\ell - \frac{1}{m} \leq u_{\varphi(m)} \leq \ell + \frac{2}{m}.$$

Par récurrence on a construit une suite $(\varphi(m))_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ strictement croissante et on a $\lim_{m\to+\infty} u_{\varphi(m)} = \ell$.

* Cas où $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$.

Il se traite de même en remplaçant $\ell - \frac{1}{m}$ par $-m$ ou m.

3) . le cas où pour tout n assez grand $\begin{cases} \inf\limits_{k\geq n} u_k = -\infty \\ \inf\limits_{k\geq n} v_k = +\infty \end{cases}$ (ou vice versa) est exclu.

. On a donc à partir d'un certain rang $\inf\limits_{k\geq n} v_k < +\infty$ ou $\inf\limits_{k\geq n} u_k > -\infty$

. Alors pour tout $p \geq n$

$$\inf_{k\geq n} u_k + \inf_{k\geq n} v_k \leq u_p + v_p$$

d'où

$$\inf_{k\geq n} u_k + \inf_{k\geq n} v_k \leq \inf_{p\geq n} (u_p + v_p).$$

En passant à la limite $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} v_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k + \inf_{k\geq n} v_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n}(u_p+v_p)\right)$$

car on a exclu la forme indéterminé $+\infty - \infty$

* Cas où l'inégalité est stricte :

On prend $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 0$ d'où

$$\liminf u_n + \liminf v_n = -1 - 1 = -2 < 0 = \liminf (u_n + v_n).$$

Exercice 2

~~1) * b) ⇒ a) :~~

~~Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.~~

~~Par b), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\forall y \in B(x,r)$ $f(y) > f(x) - \varepsilon$.~~

~~Il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $x_n \in B(x,r)$.~~

~~Donc $f(x_n) > f(x) - \varepsilon$.~~

~~Ainsi $\inf\limits_{k\geq n} f(x_k) \geq f(x) - \varepsilon$, et en passant à la limite $n \to +\infty$~~

~~$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{k\geq n} f(x_k)\right) \geq f(x) - \varepsilon$.~~

Exercice 2

1) $\ast$ b) $\Rightarrow$ a)

. Soit $t < f(x)$, il existe $r > 0$ tel que $\forall y \in B(x,r)$ $f(y) > t$

. Soit $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$ $x_n \in B(x,r)$.

Ainsi $\inf\limits_{k \geq n} f(x_k) \geqslant t$ pour tout $n \geqslant N$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\inf\limits_{k \geq n} f(x_k) \right) \geqslant t$.

. On a montré : $\forall t < f(x)$ $\liminf\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \geqslant t$.

D'où $\liminf\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \geqslant f(x)$.

$\ast$ a) $\Rightarrow$ b) On raisonne par contraposition.

Si b) n'est pas vraie : $\exists t < f(x)$, $\forall r > 0$, $\exists y \in B(x,r)$ tel que $f(y) \leq t$

On choisit $r = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $y_n \in B(x, \frac{1}{n+1})$ tel que $f(y_n) \leq t$.

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x. De plus

$$\liminf_{n \to +\infty} f(y_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geq n} f(y_k) \right) \leq t < f(x).$$

Donc a) n'est pas vraie.

Conclusion : a) $\Rightarrow$ b).

2) * b) $\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\ \{x\in\mathbb{R}^N \ / \ f(x)\leq t\}$ est fermé

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\ \{x\in\mathbb{R}^N \ / \ f(x)>t\}$ est ouvert

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^N, \forall t\in\mathbb{R}$, tels que $f(x)>t$, $\exists r>0$, $\forall y\in B(x,r)$ $f(y)>t$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^N$ f est s.c.i en x

$\Leftrightarrow$ a).

* Montrons a) $\Rightarrow$ c).

Soit $(x_n,t_n)\in\{(x',t')\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \ / \ f(x')\leq t'\}$ tel que $(x_n,t_n)\to(x,t)$.

Par semicontinuité inférieure

$$f(x)\leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f(x_n)\leq t_n}}{\leq} \liminf_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = t.$$

Donc $(x,t)\in\{(x',t')\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \ / \ f(x')\leq t'\}$ et cet ensemble est fermé.

* Montrons c) $\Rightarrow$ b)

Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$\underbrace{\{(x',t')\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \ / \ f(x')\leq t'\}}_{\text{fermé}}\cap\underbrace{(\mathbb{R}^N\times\{t\})}_{\text{fermé}} = \{x'\in\mathbb{R}^N \ / \ f(x')\leq t\}\times\{t\}$$

Donc $\{x'\in\mathbb{R}^N \ / \ f(x')\leq t\}\times\{t\}$ est fermé.

Par suite $\{x'\in\mathbb{R}^N \ / \ f(x')\leq t\}$ est fermé (les deux ensembles sont homéomorphes).

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite $x\in\mathbb{R}^N$.

Par continuité de f, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x)$.

D'après l'exercice 1, on a donc $\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim f(x_n) = f(x)$.

Exercice 3

1) Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x.

D'après l'exercice 1,

$$\liminf_{n\to+\infty} \left(f_1(x_n) + f_2(x_n)\right) \geq \liminf_{n\to+\infty} f_1(x_n) + \liminf_{n\to+\infty} f_2(x_n) \geq f_1(x) + f_2(x).$$

Donc $f_1 + f_2$ est s.c.i en x. Ceci est vrai pour tout x, d'où le résultat.

2) On utilise l'exercice 2.

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^N$, $\left(\sup_{i\in I} f_i(x) \leq t\right) \iff \left(\forall i \in I \quad f_i(x) \leq t\right)$

donc $\left\{x \in \mathbb{R}^N / \sup_{i\in I} f_i(x) \leq t\right\} = \bigcap_{i\in I} \underbrace{\left\{x\in\mathbb{R}^N / f_i(x) \leq t\right\}}_{\text{fermé car } f_i \text{ est s.c.i}}$

Donc $\{x\in\mathbb{R}^N / \sup f_i(x) \leq t\}$ est fermé pour tout $t\in\mathbb{R}$ (intersection de fermés) donc $\sup_{i\in I} f_i$ est s.c.i.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^N$, et $t < \min_{i\in I} f_i(x)$.

En particulier $\forall i \in I$, $t < f_i(x)$ et par semicontinuité de f_i

$$\exists r_i > 0, \quad \forall y \in B(x, r_i) \quad f_i(y) > t.$$

Posons $r = \min_{i\in I} r_i$. On a $r > 0$ et $\forall y \in B(x,r)$,

car I fini $\quad \min_{i\in I} f_i(y) > t.$

Cela montre que $\min_{i\in I} f_i$ est s.c.i en x.

Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n \to \min_{i\in I} f_i$ est s.c.i sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 5

1) Pour $C_1 = \{a\}$, $\quad C_1 + C_2 = \{a + x_2 \ / \ x_2 \in C_2\}$

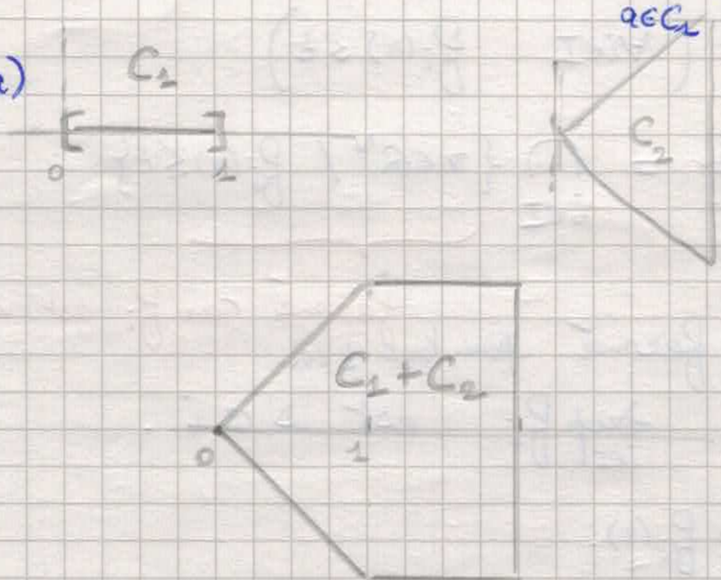
$C_1 + C_2$ est le translaté de C_2 par a.

Dans le cas général $C_1 + C_2 = \{a + x_2 \ / \ a \in C_1, \ x_2 \in C_2\}$

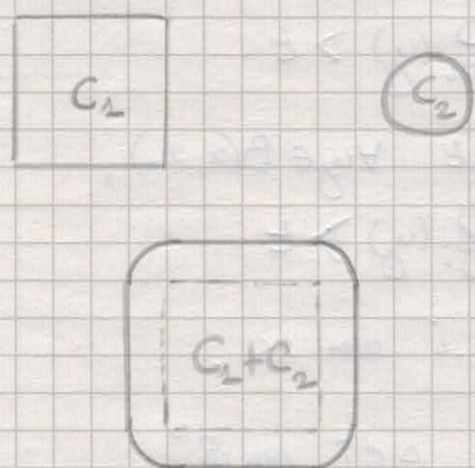
$$= \bigcup_{a \in C_1} \{a + x_2 \ / \ x_2 \in C_2\}$$

$$= \bigcup_{a \in C_1} (\{x_1\} + C_2).$$

2)a)



b)



3) Soient $\theta \in [0,1]$, $x \in C_1 + C_2$ et $x' \in C_1 + C_2$.

Il existe $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$ tels que $x_1 + x_2 = x$

— $x'_1 \in C_1, x'_2 \in C_2$ — $x'_1 + x'_2 = x'$.

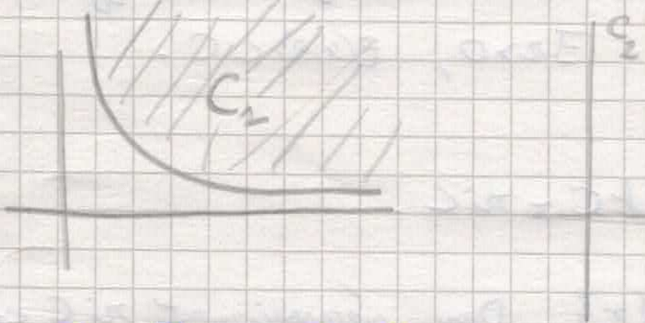
Par convexité de C_1, $\theta x_1 + (1-\theta) x_1' \in C_1$

__________ C_2 $\theta x_2 + (1-\theta) x_2' \in C_2$

Ainsi, $\theta x + (1-\theta) x' = \underbrace{\left(\theta x_1 + (1-\theta) x_1'\right)}_{\in C_1} + \underbrace{\left(\theta x_2 + (1-\theta) x_2'\right)}_{\in C_2} \in C_1 + C_2$.

Donc $C_1 + C_2$ est convexe.

4)



$C_1 + C_2 =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ qui n'est pas fermé (bien que C_1 et C_2 le soient)

5) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_1 + C_2$ qui converge dans $\mathbb{R}^N$, disons vers x.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n^{(1)} \in C_1$, $x_n^{(2)} \in C_2$ tels que

$$x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)}.$$

Par compacité de C_1 on peut extraire une sous suite $x^{(1)}_{\varphi(n)} \to x^{(1)}$.

Alors
$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x_{\varphi(n)}} = \underset{\substack{\downarrow \\ x^{(1)}}}{x^{(1)}_{\varphi(n)}} + x^{(2)}_{\varphi(n)}$$

donc $x^{(2)}_{\varphi(n)}$ converge vers un certain $x^{(2)} = x - x^{(1)}$, et $x^{(2)}$ appartient à C_2 (car C_2 est fermé).

D'où $x = x^{(1)} + x^{(2)} \in C_1 + C_2$.

On a montré que $C_1 + C_2$ est fermé.

Exercice 8

1) $ri\, C_1 =]0,1[^3$

$ri\, C_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2<1,\ z=1\}$

$ri\, C_3 = \mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\} = C_3$.

2) Si $\mathrm{int}(C)\neq\emptyset$, C contient une boule $B(x_0,r_0)$. Donc $\mathrm{Aff}\,C=\mathbb{R}^N$.
La condition $x\in ri(C)$ devient : $\exists r>0,\ B(x,r)\subset C$.
autrement dit $x\in\mathrm{int}\,C$.
Conclusion : si $\mathrm{int}\,C\neq\emptyset$, $\mathrm{int}\,C = ri\,C$.

3) a) Pour $C=\{x_0\}$, $\mathrm{Aff}\,C=\{x_0\}$. Donc nécessairement $ri\,C\subset\{x_0\}$.
On a bien $\{x_0\}\in ri\,C$, donc $ri\,C=\{x_0\}$.

Car $B(x_0,r)\cap\mathrm{Aff}\,C=\{x_0\}$

b) • Fixons $c_0\in C$, et considérons $V=\{c-c_0 \,/\, c\in\mathrm{Aff}\,C\}$
$V\subset\mathbb{R}^N$ est l'espace vectoriel qui dirige $\mathrm{Aff}\,C$:

$$\mathrm{Aff}\,C = c_0+V.$$

• Par ailleurs on sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{Aff}\,C &= \Big\{\sum_{i\in I}\lambda_i c_i \,/\, I \text{ fini},\ c_i\in C,\ \sum_{i\in I}\lambda_i=1\Big\}\\ &= c_0+\Big\{\sum_{i\in I}\lambda_i(c_i-c_0) \,/\, I\text{ fini},\ c_i\in C,\ \sum_I\lambda_i=1\Big\}\\ &= c_0+\Big\{\sum_{i\in I}\mu_i(c_i-c_0) \,/\, I\text{ fini},\ c_i\in C\Big\}\end{aligned}$$

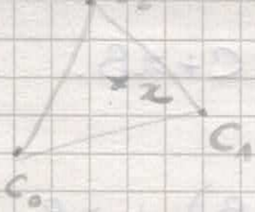
la contrainte de somme à 1 peut toujours être vérifiée en rajoutant le bon poids à (c_0-c_0).

Ainsi les $\{c-c_0\}_{c\in C}$ forment une famille génératrice de V.

~~Par le théorème~~ On peut en extraire une base de V :

$c_1-c_0,\ c_2-c_0,\ \dots,\ c_m-c_0$ (avec $m\le N$)
$m=\dim V$

On a alors $\mathrm{Aff}\,C = \mathrm{Aff}\{c_0,\dots,c_m\}$.

c) 

Posons $x = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} c_i$.

Pour tout $y \in \mathrm{Aff}\, C$, on peut écrire $y = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i$ avec $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c_i - c_0).$$

On remarque que les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les coordonnées de $(y - c_0) \in V$ dans la base $(c_1 - c_0), \dots, (c_m - c_0)$. Ce sont donc des fonctions continues de y :

$$\exists r > 0, \ \forall y \in B(x,r) \quad \left|\lambda_i - \frac{1}{m+1}\right| < \frac{1}{(m+1)m} \text{ pour tout } i \in \{1, .., m\}.$$

En particulier, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $\lambda_i > 0$

et de plus

$$\lambda_0 \overset{\text{déf}}{=} 1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 - \left(\frac{m}{m+1}\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i - \frac{1}{m+1}\right)$$

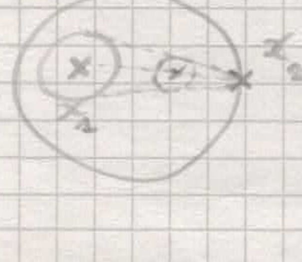
$$> \frac{1}{m+1} - \frac{\cancel{m}}{(m+1)\cancel{m}}$$

$$> 0$$

Ainsi $y = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i$ est une combinaison <u>convexe</u> des c_i donc $y \in C$.

On a montré $B(x,r) \cap \mathrm{Aff}\, C \subset C$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{ri}\, C$.

4) Quitte à se placer dans $\mathrm{Aff}\, C$, on peut supposer que $\mathbb{R}^N = \mathrm{Aff}\, C$ et $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$.



Posons $B = B(0,1)$. On veut montrer que $\forall \theta \in [0,1[$, il existe $r > 0$ tel que

$$(1-\theta) x_1 + \theta x_2 + rB \subset C.$$

Puisque $x_2 \in \overline{C}$, on sait que $\forall r>0$, $x_2 \in C + rB$.

Pour tout $r>0$, on a donc

$$(1-\theta)x_1 + \theta x_2 + rB \subset (1-\theta)x_1 + \theta(C+rB) + rB$$
$$= (1-\theta)\left[x_1 + \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)rB\right] + \theta C$$

Puisque $x_1 \in \mathrm{Int}\, C$, pour r assez petit, $\left(x_1 + \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)rB\right) \subset C$.

Alors $(1-\theta)x_1 + \theta x_2 + rB \subset (1-\theta)C + \theta C \subset C$

par convexité de C

Donc $(1-\theta)x_1 + \theta x_2 \in \mathrm{Int}\, C$.

cqfd.