

(3)

VARIETES MORPHOMETRIQUES

(1)

Introduction: diaporame pour point.

I - Recalage d'image à partir d'ensembles de points aimés. (\rightarrow diaporame)

$$(x_i)_{i=1-N}$$

$$(y_j)_{j=1-n}$$

$$\text{dans } \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^d (d=2 \text{ ou } 3)$$

- contraints discrets
- champ dense po
mit une
congruence

But: Trouver une déformation ϕ de l'espace ambiant \mathbb{R}^d (qui contient les domaines)

telle que $\phi(x_i) = y_j$ ou $\phi(x_i) \approx y_j$. apparemment inexact car l'inversion

- Problème mal posé: il y a un où de faveur d'implémentation ϕ entre les contraints
Le but est d'apporter sur la structure ou la régularité de ϕ .

1. Recalage Affine: $\varphi(x) = Ax + t$

[Action sur une image: $\varphi \circ I = I \circ \varphi^{-1}$]

$$Y = (y_1 | \dots | y_n)$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$A: 3 \times 3$$

$$t: 3 \times 1$$

$$M: 1 \times N$$

$$Y = Ax + tM + \varepsilon \quad \varepsilon = (\varepsilon_1 | \dots | \varepsilon_N) : \text{ind } \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$$

$$f(A, t) = \|Y - Ax - tM\|_F^2 \rightarrow \text{Frobenius (PSD)}$$

$$f(t + \delta \varepsilon) = f(t) + 2 \underbrace{\langle Y - Ax - tM, \delta \varepsilon \rangle_F}_{\text{Tr}((\delta \varepsilon)^T (Y - Ax - tM))} + o(1/\delta \varepsilon)$$

$$= \text{Tr}(\delta \varepsilon^T (Y - Ax - tM)^T) = \underbrace{\langle \delta \varepsilon, (Y - Ax - tM)^T \rangle_{\mathbb{R}^d}}_{-tM^T}.$$

$$\nabla_t f = 0 \Rightarrow (Y - Ax - tM)^T = 0 \quad \text{et } M^T = N$$

$$t = \frac{1}{N} (Y - Ax)^T = \frac{1}{N} \sum_i Y_i - Ax_i = \bar{Y} - A\bar{x}$$

(2)

$$\text{Coordées centrées: } \tilde{X}_i = X_i - \bar{X} \quad \tilde{Y}_i = Y_i - \bar{Y}$$

$$\text{et } Y - AX - t^T M = \tilde{Y} - A\tilde{X}$$

$$f(A) = \| \tilde{Y} - A\tilde{X} \|^2_F$$

$$f(A + \delta A) = f(A) + 2 \langle \tilde{Y} - A\tilde{X}, \delta A \tilde{X} \rangle_F \Rightarrow (15a)$$

$$\underbrace{\tilde{Y}^T (\delta A \tilde{X})}_{\langle \delta A (\tilde{Y} - A\tilde{X}) \tilde{X}^T \rangle_F}$$

$$\nabla_A f = 0 \Rightarrow A = (\tilde{Y} \tilde{X}^T) (\tilde{X} \tilde{X}^T)^{-1}$$

$$= \left(\sum_i \tilde{Y}_i \tilde{X}_i^T \right) \left(\sum_i \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T \right)^{-1}$$

inversible car symétrique nulle

$$\sum_i \tilde{X}_i \tilde{X}_i^T u = \lambda u \Rightarrow \sum_i |\tilde{X}_i^T u|^2 = \lambda |u|^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

$$\text{si } \lambda = 0 \quad \tilde{X}_i^T u = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow u = 0 \quad \text{et } \tilde{X} \text{ n'a pas de colonne nulle}$$

$$\dim(\text{Vect}(x_i)) \geq d$$

donc inversible: en 2D si les X_i ne sont pas toutes colinéaires.

en 3D --- o-polygones .

DEMO

MATLAB

ANDES

(Documents / Comptes /

8010-10-Lecture SCI_numb.

ImageWrap.m.

②. Recalage petits déformations:

En un point x sur voulcan: $\varphi(x_k) = x_k + \omega(x_k)$

ω déforme un patch centré en x_k : $\omega(x) = \sum K(x, x_k) \omega_k$

avec $K(x, y) = c \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{\sigma^2}\right)$ par exemple (en centre chose)
~~pour la~~

Sur voulcan donc: ~~Haut~~ $\omega(x) = \sum_n K(x, x_n) \omega_n$ (superposition linéaire des champs de vitesse)

et $\Delta x = 1/N \quad \varphi(x_p) = x_p + \omega(x_p) = y_p$

[$2N$ éq. pour $2N$ inconnus].

(3)

Invariance de φ ?

$$P_2 \varphi = \text{id} + T_2 \circ : \text{on ne peut pas garantir de } P_2 \varphi$$

$$\varphi'(x) \approx x - v(x)$$

$$\varphi(x - v(x)) = x - v(x) + v(x - v(x))$$

$$= x - d_x v(v(x)) \rightarrow (w(v(x)))$$

ob tout que $|d_x v|$ rest petit (d'o le nom: petits déformations)

Réolution du système:

$$\varphi(x_p) = x_p + \sum_k K(x_p, x_k) x_k = y_p$$

$$\text{En notation matricielle: } y = x + \underbrace{K(x, x)}_{\text{matrice diag. pos. blesse}}$$

$$\text{Peut-on écrire: } x = K(x, x)^{-1}(y - x) ?$$

Moyen défini positif

Sch

Def: $K: S \times S \rightarrow \mathcal{O}_{\text{diag}}(\mathbb{R})$ et un moyen défini positif

$$(x, y) \quad K(x, y)$$

$$\circ K(y, x) = K(x, y)$$

ssi $\forall (x_i)_{i=1 \dots N}$ deux à deux distincts

$\left. \begin{array}{l} \forall (x_i)_{i=1 \dots N} \text{ deux à deux distincts} \\ \sum_{ij} x_i^T K(x_i, x_j) x_j \geq 0 \end{array} \right\}$

$$\sum_{ij} x_i^T K(x_i, x_j) x_j \geq 0$$

$$\text{et si } \sum_{ij} x_i^T K(x_i, x_j) x_j = 0 \text{ alors } x_i = 0.$$

Prop (Th de Bochner): Si L $K(x, y) = f(|x-y|)$ (moyen invariant par translation).

K est un moyen défini positif ssi $\hat{f}(\omega) \geq 0$ tte

$\hookrightarrow f$ intégrale, $\int f$ intégrale et vérifiant $f = F^{-1}(Ff)$

Dém (panthelle):

$$\text{on a } \sum_{i,j} \alpha_i^T K(x_i, x_j) \alpha_j = \sum_i \alpha_i^T \hat{f}(x_i) \quad \text{avec } \hat{f}(x) = \sum_j K(x, x_j) \alpha_j.$$

Par transformé de Fourier inverse: $\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$.

$$\text{or } \hat{f}(\omega) = \sum_j f(\omega) e^{-i\omega x_j} \alpha_j$$

$$\text{D'où } \sum_{i,j} \alpha_i^T K(x_i, x_j) \alpha_j = \sum_{i,j} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_i^T \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j} e^{i\omega x_i} \alpha_j d\omega$$

$$\text{En posant } h_{x_1, x_2}(\omega) = \sum_i \alpha_i e^{i\omega x_i} \quad \text{on a:}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h_{x_1, x_2}(\omega)}^T \hat{f}(\omega) h_{x_1, x_2}(\omega) d\omega.$$

Donc \hat{f} est ~~defined~~ en opération hermitien positif, alors K est un noyau positif.

Réciproquement: l'idée est de montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} \overline{h_{x_1, x_2}(\omega)}^T \hat{f}(\omega) h_{x_1, x_2}(\omega) d\omega \geq 0$

$$H(x_{1,2}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h(\omega)}^T \hat{f}(\omega) h(\omega) d\omega \geq 0 \quad \text{pour tout } h \text{ à support compact - continue borné.}$$

L'idée est d'approcher le continu borné par des fonctions L^∞ à support compact et ~~des fonctions g~~ via ces dernières par la limite de fonctions du type h_{x_1, x_2} (par décomposition en série de Fourier).

Conditionnement de la matrice K :

Sur un exemple de points (x_i) régulièrement espacés sur un cercle

$$K(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} f(x_1 - x_1) & \cdots & f(x_1 - x_N) \\ f(x_2 - x_1) & \cdots & f(x_2 - x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f(x_{N+1} - x_N) \\ f(x_{N+1} - x_1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} f(x_{N+1} - x_2) \\ \vdots \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(s) & f(s) & f(2s) & \cdots & f(s) \\ f(s) & f(s) & f(s) & \cdots & f(2s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(s) & \cdots & \cdots & \cdots & f(s) \end{pmatrix}$$

matrice circulaire

$$K_{i+n,j} = K_{i,j}$$

Se diagonalise de la manière suivante: $X_p^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2i\pi kp/N}$ pour $p = 0, \dots, (N-1)$

$$\text{Donc en général } F[k] = \sum_{p=0}^{N-1} F[p] X_p^{(k)}$$

$$(K X^{(k)})_j = \sum_{p=0}^{N-1} f((p+j)\delta) X_p^{(k)}$$

pour $j = 0, \dots, (N-1)$

$$= \sum_{p=j}^{N-1} f(p\delta) X_{p+j}^{(k)}$$

$$= \sum_{p=j}^{N-1} f(p\delta) e^{-2i\pi k(p+j)\delta} / \sqrt{N}$$

$$= \left[\underbrace{\sum_{p=j}^{N-1} f(p\delta) e^{-2i\pi k p \delta}}_{\text{par } 2\pi \text{-périodicité}} \right] e^{-2i\pi k j \delta} / \sqrt{N}$$

$$\text{par } 2\pi \text{-périodicité} = \hat{F}[k] \quad \text{par } F[k] = f(k\delta)$$

$$= \hat{F}[k] X_j^{(k)}$$

les valeurs propres de K sont les

$$\hat{F}[k]$$

$$\text{pour } f(u) = e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

$$F[k] = e^{-\frac{k^2 \delta^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{et } \hat{F}[k] \propto e^{-\frac{\sigma^2 k^2 \delta^2}{2}}$$

$$\text{et } \frac{\hat{F}[0]}{\hat{F}[N-1]} = e^{\sigma^2 \delta^2 (N-1)^2 / 2} \quad (!)$$

Mais mal conditionné lorsque $\boxed{\sigma \delta \gg 1}$.

Retour au phénomène d'apprentissage

$$\varphi(x) = x + \zeta(x) \quad w(u) = \sum_i K(x_i, x_u) \alpha_i$$

Apprentissage exact: $\forall k = 1, N \quad \varphi(u_k) = y_k \quad y = x + K(x, x_u)x$

β_k

$$\text{et } \alpha = K(x, x_u)^{-1}(y - x)$$

Apprentissage inexact: $x + q \cdot \sum_{i=1}^N |y_i - \varphi(x_i)|^2 + \gamma \|v\|^2$ minimal.

Prédicteur (pre-RKHS): Espace pré-Hilbertien à noyau reproduisant

Sur K un noyau ~~symétrique~~^{symétrique et continu} et $V = \text{Vect}(\{K(x, x_i)\alpha_i \mid x_i, \alpha \in \mathbb{R}^d\})$

Combinaison linéaire finie d'éléments du type $K(x, x_i)\alpha_i$

$$\text{Not : } \dim(V) = \infty$$

i) Pour $v, w \in V \quad v(u) = \sum_i K(x, x_i)\alpha_i \quad w(u) = \sum_j K(x, y_j)\beta_j$

$$\langle v, w \rangle_V = \sum_{ij} x_i^\top K(x_i, y_j) \beta_j \quad (= x^\top K(x, y) \beta) \quad (\star)$$

définit un produit scalaire

ii) (\star) ne dépend pas de la décomposition choisie.

$\hookrightarrow V$ s'appelle

iii) $\forall v \in V, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad v(u)^T x = \langle K(\cdot, x), v \rangle_V$

en particulier pour $v = K(\cdot, y)\beta$: $K(\cdot, x)^T K(\cdot, y)\beta = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, y)\beta \rangle$

Cette dernière s'appelle propriété d'auto-reproduction et V s'appelle un espace pré-Hilbertien à noyau reproduisant.

6 bis

Dén: ii) Ne dépend pas de la décomposition choisie.

$$\Leftrightarrow \sum_i^r K(x_i, \cdot) \alpha_i = \sum_j^{\tilde{r}} K(y_j, \cdot) \beta_j$$

on veut montrer que pour tout γ on a $\langle v, K(\cdot, \gamma) \rangle = \langle \tilde{v}, K(\cdot, \gamma) \rangle$

$$\sum_i^r K(x_i, \gamma) \alpha_i = \sum_j^{\tilde{r}} K(y_j, \gamma) \beta_j$$

~~$\langle v, \gamma \rangle = \alpha^T K(x, \gamma) \beta$ et bilinéaire, symétrique car $K(x, y) = K(y, x)^T$~~

defini positive car

$$\text{iii)} \quad \forall \gamma \in V, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad v(x)^T \alpha = \langle K(\cdot, x), \gamma \rangle_V \quad \text{car}$$

car c'est vrai pour $v(x) = K(\cdot, y) \beta$

et donc pour tout v par linéarité

$$i): \langle v, v \rangle = v^T K(v, v) \beta \quad \text{bi-linéaire ok}$$

symétrique car $K(v, y) = K(y, v)^T$

defini positive car

$$\text{soit } \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v(x)^T \alpha = \langle v, K(x, \cdot) \rangle_V$$

$$\text{et } |v(x)^T \alpha| \leq \|v\|_V \|K(x, \cdot) \alpha\|_V = 0 \Rightarrow v(x) = 0 \quad \forall x.$$

Résumé du pb d'apprentissage linéaire.

(7)

et tq. $\sum_{i=1}^n |y_i - \mathbf{x}_i^T \alpha| + \gamma \|\alpha\|^2$ est minimal

$$f(\alpha) = \|y - \mathbf{x} - K(\mathbf{x}, \mathbf{x})\alpha\|^2 + \gamma \alpha^T K(\mathbf{x}, \mathbf{x})\alpha$$

$$f(\alpha + \delta\alpha) = f(\alpha) + 2(y - \mathbf{x} - K\alpha)^T K\delta\alpha + 2\gamma K\delta\alpha + o(|\delta\alpha|)$$

$$\partial_\alpha f = 2(yK\alpha - K(y - \mathbf{x}))$$

$$\partial_\alpha f = 0 \Rightarrow y\alpha + K\alpha = \underbrace{y - \mathbf{x}}_{\text{regularisation}} \quad \alpha = (K + \gamma I)^{-1}(y - \mathbf{x})$$

Compromis régularisé
et attaché aux données.

\downarrow
regularisation
meilleur conditionnement.

DÉMO MATLAB ARCSSES

→ γ petit \Rightarrow mauvais conditionnement de K (visible?)

pb d'inversibilité de \mathbf{q} : action sur l'image

→ $\gamma \rightarrow \infty$ \Rightarrow stabilisée / régularisée

Compromis avec l'attaché aux données
tf pb q⁻¹ ?

3. Appariement en grande déformation:

8

idée: Compo'm de "petits déplacements" $\text{v}_0 \text{ v}_1 \text{ v}_2 \dots \text{ v}_n$.

1^e idée: $x(t) = \varphi(x_0)$: pas très naturel : il faut beaucoup d'energy pour une grande translation.



on voudrait plutôt transposer le champ de vecteur avec les points (la translation agit en retour sur le point).



2^e idée: le champ ω dépend du temps t , $\omega_t(x) \in V$

$$\omega_E(x) = \sum_{i=1}^N K(x, x_i(\omega_t)) \omega_t(x_i)$$

et on impose : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = \omega_t(x_i(t)) \\ x_i(0) = x_{i0} \end{array} \right.$

$$\text{Si } \left(\text{et d'un maniére génériq: } x \mapsto \varphi_t(x) \text{ Marque: } \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \omega_t(\varphi_t(x)) \right) \quad \cancel{\text{et}} \quad \varphi_0 = \text{id.}$$

Q: Existe-t-il et combien de fonction L^2 : $x(t): C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tq. $\dot{x}_i(t) = \omega_i$?

* Sur l'ensemble : . Compte-tenu des contraintes de régularité sur K , il n'y a pas de raison que ce chef existe.

. Il n'est pas finiment dérivable (buit, impasses, etc...)

inévitables.

on cherche plutôt parmi tous les chemins $L^2(C_0, \mathbb{R})$ ceux qui minimisent.

$$E(x) = \|x(1) - y\|^2 + \gamma \int_0^1 \|\dot{x}(t)\|_V^2 dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \omega_t(x(t)) = K(x(t), x(t)) x(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Reprise du cours

(8 hrs)

K un noyau positif

- Rappel: pre-RKHS $V = \text{Vect}(\{K(x, \cdot) \alpha \mid x, \alpha \in \mathbb{R}^d\})$

$$\langle K(x, \cdot) \alpha, K(y, \cdot) \beta \rangle_V = \alpha^\top K(x, y) \beta. \quad \text{diff. un produit scalaire}$$

$$x \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma(x)^\top \alpha = \langle K(x, \cdot) \alpha, \sigma \rangle_V \quad (\text{représentance})$$

On peut répondre:

$$x = (x_1, \dots, x_m)$$

$$y = (y_1, \dots, y_m)$$

$$E(u) = \underbrace{\|\varphi(x) - y\|^2}_{W} + \frac{1}{2} \gamma \|u\|_V^2$$

$$\text{avec } \varphi(x) = x + \sigma(x)$$

$$\text{et } \sigma(x) = \sum_i K(x, x_i) \alpha_i.$$

$$u = \underbrace{\arg \min}_{u \in \mathbb{R}^d} (K(u, x) + \gamma I)^{-1} (y - x)$$

- On veut maintenant que φ = solution au temps 1 de $\begin{cases} \frac{d\varphi_t(u)}{dt} = \omega_t(\varphi_t(u)) \\ \varphi_0(u) = u \end{cases}$

$$\text{avec } \omega_t(u) = \sum_{i=1}^m K(x, x_i(t)) \alpha_i(t) \quad \text{au tout temps.}$$

→ Recherche que la trajectoire de φ . On remplace donc le critère à minimiser par:

$$E(t) = \underbrace{\|\varphi_t(x) - y\|^2}_{x(1)} + \frac{1}{2} \gamma \int_0^t \|u_s\|_V^2 ds \quad \text{avec } \dot{u}_i(t) = \sum_j \alpha_i(t)^\top K(x_i(t), x_j(t)) \alpha_j(t)$$

↳ on démontre que les trajectoires $(x_i(t))$ est une solution de $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_i(t)^\top K(x_i(t), x_j(t)) \alpha_j(t)$

Q: Y a-t-il existe des $\{\alpha_i(t)\}$ qui permet d'atteindre $x(1)$ à partir de x_0 ?

Hyp: Le chemins $(x(t), \dot{x}(t))$ minimisent (x) sont des chemins d'énergie minimale.

Dém: Soit $x(t)$ fixé, le temps se minimal

Soit $\tilde{x}(t)$ fixé tel que atteignent $\tilde{x}'(t)$, avec \tilde{x} minimal (x)

$$\text{minimum } \int_0^T \tilde{x}(t)^T K(x(t), \dot{x}(t)) \tilde{x}(t) dt = \int_0^T \tilde{x}(t)^T K^{-1}(x(t), \dot{x}(t)) \tilde{x}(t) dt \\ \text{par } K(t) = K(x, \dot{x}) t.$$

Def: Soit $M = \mathbb{R}^{N,d}$ ~~et~~ $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une carte locale de M (renommé η)
 (x_1, \dots, x_n)

K un moyen positif: $K^{-1}(x, \dot{x})$ définit une métrique sur M .

Chacune K^{-1} pour $x(t)$ fixé en t , on voit $\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^T K^{-1}(x(t)) \dot{x}(t)}$

Calcul: Soit $(x(t), \dot{x}(t))$ un chemin géodésique sur M . (c'est à dire minimal) $\int_0^T \dot{x}(t)^T K^{-1}(x(t)) \dot{x}(t) dt$

$x(t)$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2} \dot{x}^T (d_x K^{-1}(x, \dot{x})) \dot{x} = -\frac{1}{2} \dot{x}^T K^{-1}(x, \dot{x}) d_x K(x, \dot{x}) \dot{x} K^{-1}(x, \dot{x})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = d_{\dot{x}} (K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x}) \dot{x} + K^{-1} \ddot{x}$$

$$\text{D'où } K^{-1} \ddot{x} + d_{\dot{x}} (K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x}) \dot{x} = +\frac{1}{2} (d_x K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x}) \dot{x}$$

$$K^{-1} \ddot{x} = -\frac{1}{2} (d_x K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x}) \dot{x}$$

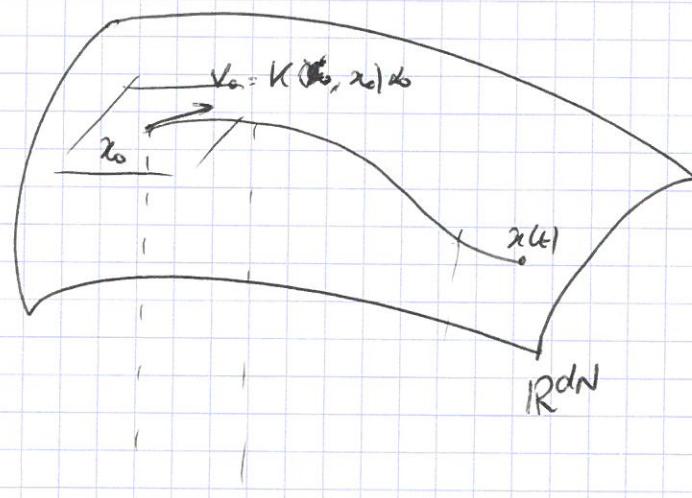
Posons: $\dot{x} = K(x, \dot{x}) \alpha$

$$\dot{x} = (d_x K(x, \dot{x}) \alpha) \dot{x} + K(x, \dot{x}) \dot{\alpha}$$

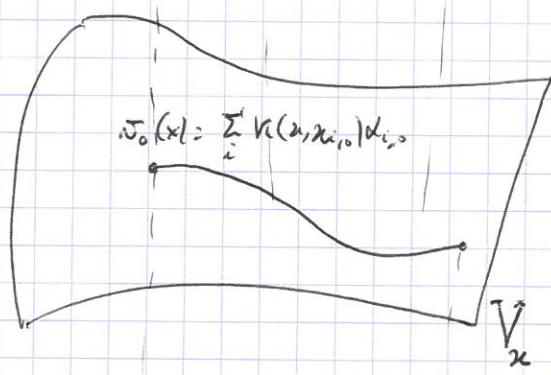
$$\text{et } (d_x K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x}) \dot{x} = -K^{-1}(x, \dot{x}) d_x K(x, \dot{x}) (K^{-1}(x, \dot{x}) \dot{x}) \dot{x} \\ = -K^{-1}(x, \dot{x}) d_x (K(x, \dot{x}) \alpha) \dot{x}$$

$$\text{D'où } \ddot{x} = -\frac{1}{2} K^{-1}(x, \dot{x}) (d_x K(x, \dot{x}) \alpha) \dot{x} = -\frac{1}{2} (d_x K^{-1}(x, \dot{x}))^T \dot{x} = -\frac{1}{2} (d_x K^{-1}(x, \dot{x}))^T \dot{x}$$

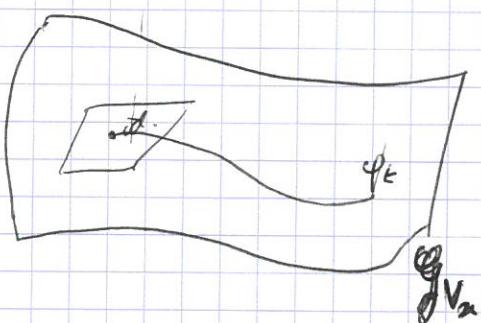
La situation est la suivante :



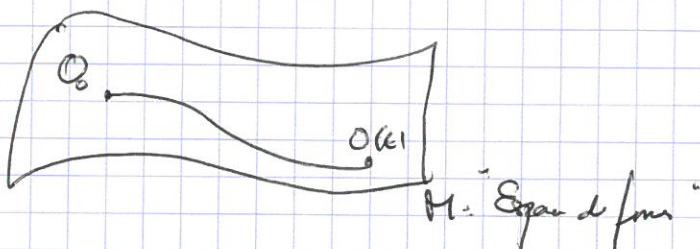
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K(x(t), x(t)) \alpha(t) \\ \ddot{\alpha}(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} K(x(t), x(t)) \alpha(t) \right) \end{cases}$$



$$v_t(x) = \sum_{i=0}^N K(x, x_{i,0}) \alpha_i(t)$$



$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} = v_t \circ \phi_t \\ \phi_0 = \text{id} \end{cases}$$



$$O(t) = \phi_t * O_0$$

$$M = R^{dN}$$

$$\text{Si } O_0 = \{x_{i,0}\} \text{ alors } O(t) = \{x_{i,0} + t \alpha_i(t)\}.$$

Image et
équation
de la
courbe

Prop: Soit V un espace de Hilbert

qui s'injecte continûment dans $(C_0^1, \|\cdot\|_\infty)$ alors C^1 s'annexe à L^∞ ainsi que leur duals ponctuels

$$(i.e. \exists C_V, \forall v \in V, \|v\|_{1,\infty} \leq C_V \|v\|_V)$$

Sur
Pour tout $v \in L^1(C_0, J, V)$, alors

i) $\forall x \in \mathbb{R}^d$, il existe une application unique $t \mapsto \varphi_t(x)$ continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^d vérifiant :

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t \nabla_s (\varphi_s(x)) ds$$

ii) l'application $x \mapsto \varphi_t(x)$ est un difféomorphisme de classe C^1 pour tout temps t .

Rq: On passe régularité + jde de v , permet d'avoir + de régularité ~~des solutions~~ des trajectoires.

Conclusion: \mathcal{G}_V est un ensemble de difféomorphismes.

\rightarrow les difféo de \mathcal{G}_V sont très bons à inverser!

Prop: Soit $\varphi_t \in \mathcal{G}_V$. ψ_t solution de $\dot{\psi}_t = -\nabla_{1-t} \circ \varphi_t$ alors $\varphi_t = \psi_t^{-1}$.

Dém:

$$V_X = \text{Vect} \left\{ \sum_{x_i \in X} k(x_i, x_i) \alpha_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d \right\} \quad \dim V_X < \infty \quad \text{et} \quad x \in X$$

$$\mathcal{G}_{V_X} = \left\{ \varphi_1^{\sigma_0} \mid \begin{array}{l} \sigma_0 \in V_X \\ \sum_k k(\cdot, x_{i_0}) \alpha_{i_0} = x \end{array} \right. , \quad (\dot{X}, \dot{x}) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^{nd} \}$$

Rq: \mathcal{G}_{V_X} n'est pas un groupe. En effet si $\varphi_1^{\sigma_0}$ et $\varphi_1^{\sigma_0} \in \mathcal{G}_{V_X}$, on ne peut pas composer $\varphi_1^{\sigma_0} \circ \varphi_1^{\sigma_0}$ car la condition inhérente de $\varphi_1^{\sigma_0} \circ \varphi_1^{\sigma_0}(x) = \varphi_1^{\sigma_0}(x)$ et $x \in X$.

A l'inverse $\mathcal{G}_V = \left\{ \varphi_1^{\sigma} \mid \sigma \in \mathbb{R}^d(C_0(\mathbb{R}), V) \right\}$ en est un. ~~on ne suppose pas de dim =~~

Le restriction à une section de dim = pour démontrer la fonctionne Riemann.

Les groupes en dim = peuvent prendre d'autres formes -

Déf: Soit $\varphi_1^{\sigma_0}$ et $\varphi_2^{\sigma_0} \in \mathcal{G}_V$ alors $\varphi_1^{\sigma_0} \circ \varphi_2^{\sigma_0} \in \mathcal{G}_{V_X}$.
 $\varphi_1^{\sigma_0} \circ \varphi_2^{\sigma_0}(x) = \varphi_1^{\sigma_0}(\varphi_2^{\sigma_0}(x))$

Définition: Soit $u \times v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2v_{2t-1} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Alors $\varphi_1^{\sigma_{uv}} = \varphi_1^{\sigma_u} \circ \varphi_1^{\sigma_v}$ va être différable -

Dém: Sur $[0, \frac{1}{2}]$ $\frac{\partial \varphi_1^{\sigma_{uv}}}{\partial t} = 2u_{2t} \circ \varphi_1^{\sigma_{uv}}$ $\varphi_0^{\sigma_{uv}} = \text{id.}$

$$\frac{\partial \varphi_1^{\sigma_{uv}}}{\partial t} = 2 \cdot u_{2t} \circ \varphi_1^{\sigma_{uv}} \quad \varphi_0^{\sigma_{uv}} = \text{id.}$$

$$\text{Dès lors } \varphi_1^{\sigma_{uv}} = \varphi_{2t}^{\sigma_u} \text{ sur } [0, \frac{1}{2}].$$

$$\text{Et donc } \varphi_{1/2}^{\sigma_{uv}} = \varphi_1^{\sigma_v}.$$

$$\text{Sur } [t_2, 1], \quad \frac{\partial \varphi_t^{\text{univ}}}{\partial t} = 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k^{\text{univ}} \quad \varphi_{t_2}^{\text{univ}} = \varphi_1^u.$$

d'après
quatre

$$\frac{\partial \varphi_{t-1}^{\text{univ}} \varphi_1^u}{\partial t} = 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k^{\text{univ}} \varphi_1^u \quad \varphi_{\frac{t+1}{2}}^{\text{univ}} \varphi_1^u = \varphi_1^u.$$

$$\text{Donc } \varphi_t^{\text{univ}} = \varphi_{t-1}^{\text{univ}} \varphi_1^u \text{ sur } [t_2, 1]$$

$$\text{Donc en } t=1 : \varphi_1^{\text{univ}} = \varphi_1^{\text{univ}} \varphi_1^u.$$

Démon (hyp):

$$u_t(x) = \sum_{i=1}^N K(x, x_i(t)) \alpha_i(t) \quad x_i(0) = x_{i_0}$$

$$v_t(x) = \sum_{i=1}^N K(x, \cancel{x_i(t)} + y_i(t)) \beta_i(t) \quad y_i(0) = x_{i_0}(1)$$

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t) & t \in [0, t_2] \\ y_i(t+1) & t \in [t_2, 1] \end{cases}$$

$$y_i(t) = \begin{cases} d_i & \\ b_i & \end{cases}$$

$$\text{j'ai } u \otimes v(t) = \sum_{i=1}^N K(\cdot, z_i(t)) y_i(t).$$

$$z_i(0) = x_{i_0}$$

Donc il existe un chemin $\overset{L^2}{V}$ dans la variété riemannienne reliant x_{i_0} à $z_i(1) = \varphi_1^u \varphi_1^u(x_{i_0})$.

Parmi tous les chemins géodésiques entre x_{i_0} et $z_i(1)$, il y en a un d'énergie minimale et donc on peut écrire : $\cancel{\varphi_1^u \varphi_1^u} \varphi_1^{\text{univ}} = \text{Exp}(w)$ et $\varphi_1^{\text{univ}} \in \mathcal{G}_{V_x}$.

$\exists w \in V_{x(t)} \quad \underline{\varphi_t^{\text{univ}}} \text{ est solution au temps } t=1$

$$\text{de } \frac{\partial \varphi_t^{\text{univ}}}{\partial t} = w \circ \varphi_t^{\text{univ}}$$

$\forall t \in]t_2, 1[\quad \text{et } (x(t), K(x(t), x(t))) \in \mathcal{G}_{V_x}$

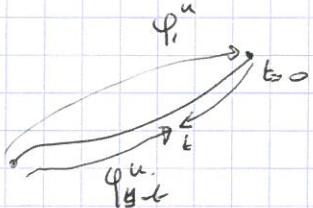
soit les quat

10 quinh

Prop: φ_1^u admet un inverse dans l'espace des diffeomorphismes

$$\left((\varphi_1^u)^{-1} \in \mathcal{G}_{V_{X(\tau)}(x)} \right) \text{ et } \cancel{\text{Pf}} (\varphi_1^u)^{-1} \text{ est solution au temps } 1 \text{ de} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = - u_{1-t} \circ \varphi_t \\ \psi_0 = \cancel{\varphi_1^u} \text{ id.} \end{array} \right. \quad (x)$$

Dém:



$$\text{S'il } \psi_t = \varphi_{t-t}^u \circ (\varphi_1^u)^{-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = \text{id} \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi_{1-t}^u}{\partial t} \circ (\varphi_1^u)^{-1} = - u_{1-t} \circ \varphi_{1-t}^u \circ (\varphi_1^u)^{-1} \\ = - u_{1-t} \circ \varphi_t. \end{array} \right.$$

Dès que $\varphi_{1-t}^u \circ (\varphi_1^u)^{-1}$ est solution de (x)

$$\text{En } t=1, \quad \psi_1 = (\varphi_1^u)^{-1} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \psi_t}{\partial t} \right|_{t=0} = - u_1 \in V_{X(1)}.$$

Dès que il existe un chemin dans $L^2(C_0, \mathcal{D}, V)$ reliant $X(1)$ à $X(0)$.

Il existe un chemin d'énergie minimale et $(\varphi_1^u)^{-1} \in \mathcal{G}_{V_{X(1)}}$.

Rq: A) La solution ψ_t pour $t=1$ vaut $\varphi_{1-t}^u \circ (\varphi_1^u)^{-1} \neq (\varphi_1^u)^{-1}$

Prop: $(\varphi_t^u)^{-1}$ est solution au temps t de : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = - (d\psi_t) u_t \quad \psi_0 = \text{id} \end{array} \right.$

Rq: niente
un schéma
de discutare
au temps ET
en espace.

$$\begin{aligned} \text{Dém: } \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t^u)^{-1} (\varphi_t^u(x)) &= 0 = d_{\varphi_t^u(x)} (\varphi_t^u) \frac{\partial \varphi_t^u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_t^u}{\partial t} (\varphi_t^u(x)) \\ &= (d_{\varphi_t^u(x)} \varphi_t^u) u_t \circ (\varphi_t^u(x)) + \frac{\partial \varphi_t^u}{\partial t} (\varphi_t^u(x)) \\ &= \left[(d_{\varphi_t^u(x)} \varphi_t^u) u_t + \frac{\partial \varphi_t^u}{\partial t} \right] \circ \varphi_t^u(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial \varphi_t^u}{\partial t} = - (d_{\varphi_t^u(x)} \varphi_t^u) u_t$$