- Le problème d'optimisation $E([\alpha(t)]_k) = |X(1) - y|^2 + \gamma \int_0^1 |v_t|_V^2 \, dt$

$$\text{avec } \begin{cases} \dot{X}(t) = v_t(x(t)) = K(x(t), x(t))\alpha(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

devient : $E(\alpha_0) = |X(1) - y|^2 + \gamma |v_0|_V^2$ dans $\mathbb{R}^{dN}$.

$$\text{avec } \begin{cases} \dot{x}(t) = K(x(t), x(t))\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) = -\frac{1}{2}\left(d_{x(t)}K(x(t), x(t))\alpha(t)\right)^T \alpha(t) \end{cases}.$$

↳ soluble avec des méthodes d'optimisation sans gradient
- avec différentiation automatique
- on verra comment calculer le gradient au chapitre suivant.

PPT
film structure
sous-cintrés
Dom Syndrome
+ crânes.

$$\boxed{\text{DEMO avec des } \begin{array}{|l} \text{FEUILLES ?} \\ \text{ANCRES ?} \end{array}}$$

stanley/ nemo. eep/ stanley/
projetRadulaDiffeos/
leaves MVA.m.

Commenter pause ligne 628 !

CRITIQUES :
- Nécessite une annotation des points cohérente
- Pour des images on pourrait vouloir guider l'estimation de α_0 par la superposition des niveaux de gris.
- On a vu que l'échantillonnage des points doit être relié à la taille du noyau K.

↳ Idée : Pt de contrôle indépendant de la forme :

$$E(c_0, \alpha_0) = |\theta(1) - y|^2 + \gamma |v_0|_V^2$$

$\Rightarrow$ Devrait nécessiter des métriques et objets qui ne font pas l'hypothèse de correspondance de points.

avec $\dot{S}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} = F(S(t))$ $\quad S(0) = S_0$.

$\dot{O}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t * O_0$ $\quad O(0) = O_0$.

(i1b2)

Par exemple pour des images, on a:

$$E(S_0, x_0) = | I(1) - I_1 |_{L^2} + \gamma |v_0|_V^2$$

$$\text{ssi} \quad \dot{S}(t) = F(S(t)) \qquad S(0) = S_0$$

$$I(t) = \cancel{\varphi_t} \circ I_0 \circ \varphi_t^{-1} \qquad \cancel{\frac{dI(t)}{dt}} =$$

$$Y_t : \Omega \longrightarrow \Omega \qquad Y_t = \varphi_t^{-1} \qquad \frac{\partial Y_t}{\partial t} = - v_{1-t} \circ Y_t$$
$$x \qquad \varphi_t^{-1}(x)$$

et pour une grille régulière $\Lambda = \{x_k\}$ $\qquad \underbrace{\dot{Y}_t(x_k)} = - v_{1-t}(Y_t(x_k))$

$$\dot{x}_k(t) = - v_{1-t}(x_k(t))$$

et donc $\quad E(S_0) = |\overbrace{I(1)}^{I_0 \, Y_1} - I_1|_{L^2}^2 + \gamma |v_0|^2$

$$\dot{S}(t) = F(S(t))$$

$$\dot{Y}(t) = G(Y(t), S(t)) \qquad ; \quad Y_0 = \Lambda.$$

Pour exemple des ensembles de points.

$$E(S_0) = | Y(1) - X_0 |_{?}^2 + \gamma |v_0|_V^2 \qquad X(1) \; / \; \dot{X}(t) = F(X(t), S(t))$$
$$\dot{S}(t) = F(S(t))$$

- Si points annotés, on peut $| \; |_{L^2}$: distance pts de contrôle et points de la forme. → lié à σ du noyau.

- Sinon il faut d'autres métriques. et si courbes / surfaces? } → Hausdorff? ou courants (pas optimal).

II. Les RKHS

1. Construction de RKHS à partir de noyaux.

On a vu : si K est un noyau défini positif (en fait positif seulement suffit)

Alors $V_K^0 = \text{Vect}\,\{K(x,x_i)\alpha_i \,/\, x, \alpha \in \mathbb{R}^d\}$ est un espace pré-Hilbertien pour le produit scalaire $\langle K(\cdot,x)\alpha, K(\cdot,y)\beta\rangle_V = \alpha^t K(x,y)\beta$.

~~Prop : Il existe un unique RKHS V~~

- On peut le compléter pour en faire un espace de Hilbert (limites des suites de Cauchy)

  . On peut écrire $v(x) = \int K(x,y)\,\alpha(y)\,dy$ pour α une distribution à préciser.

- Le complété satisfait toujours la propriété $v(x)^t\alpha = \langle K(x,\alpha)\alpha, v\rangle_V$ constitutive des RKHS.

2. RKHS : définition et caractérisation :

(a)

Def : Soit V un espace de Hilbert de fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$. V est un RKHS si et seulement si les formes linéaires $\delta_x^\alpha(\omega) = \omega(x)^t\alpha$ sont continues sur V.
(i.e. toutes les évaluations sont continues).

$|\omega(x)^t\alpha| \le C\,|\omega|_V$

ce qui veut dire qu'on peut parler de la valeur de ω en un point.

Ex L^2. f et $\tilde f$ changé en qq pts.
$|\underbrace{(f(x)-\tilde f(x))^t\alpha}_{\neq 0}| \le C|f-\tilde f|_{L^2} = 0$

Conséquence :

- Th de Riesz $\Rightarrow \exists K_x \in W$ tq $\delta_x^\alpha(\omega) = \omega(x)^t \alpha = \langle K_x(\cdot)(\alpha), \omega \rangle_W$

- $\omega(x)^t(\alpha + \lambda\beta) = \omega(x)^t\alpha + \lambda\,\omega(x)^t\beta \Rightarrow K_x(y)(\alpha)$ est linéaire

  $K_x(y)$ est une matrice $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$

- $$\underbrace{[K_x(y)(\alpha)]^t\beta}_{\alpha^t K_x(y)\beta} = \langle K_x(\cdot)\alpha, K_y(\cdot)\beta\rangle = \langle K_y(\cdot)\beta, K_x(\cdot)\alpha\rangle = \underbrace{(K_y(x)\beta)^t\alpha}_{\beta^t K_y(x)\alpha}$$

D'où $K_x(y)$ s'écrit $K(x,y)$ tq. $K(y,x) = K(x,y)^T$.

Prop : V un espace de Hilbert qui contient des champs de vecteurs de la forme $K(x,\cdot)\alpha$ et qui vérifie $\forall v \in V$, $v(x)^t\alpha = \langle K(x,\cdot)\alpha, v\rangle_V$

alors V est un RKHS.

Dém : $\underbrace{|v(x)^t\alpha|}_{|\delta_x^\alpha(v)|} \leq |K(x,\cdot)\alpha|_V\, |v|_V$

Prop : Si $V \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ champs continus décroissant vers 0 à l'∞

Alors V est un RKHS

Dém : $|v(x)^t\alpha| \leq |v|_\infty |\alpha| \leq C|v|_V|\alpha|$.

De petites erreurs sur $|v|_V \Rightarrow$ petites erreurs sur $|v|_\infty$

Important numériquement.

(Les normes sur V permet de localiser la valeur de v en un point).

$\neq$ si $V = L^2$.

(*) Pourquoi cette propriété de reproduisance ?

D un opérateur diff auto-adjoint

K son noyau de Green :

$\langle v, v'\rangle_V = \langle v, Dv'\rangle_{L^2}$ (on prend les dérivées dans un Sobolev)

Soit $Dy = v \Rightarrow y(x) = D^{-1}v(x)$

$= \int K(x,y)v(y)\,dy$

$= \langle K(\cdot,x), v\rangle_{L^2}$

$= \langle K(\cdot,x), y\rangle_V$

Ce qu'on montre ici, c'est que cette propriété seule suffit pour définir des champs de vecteurs suffisamment réguliers (δ_x^α soit continue).

D'où la propriété de reproduisance.

Prop : Si W est un RKHS alors $K(x,y)$ est un noyau positif

Dém : $\sum_{i,j} \alpha_i^T K(x_i, x_j)\alpha_j = \left\| \sum_i K(\cdot, x_i)\alpha_i \right\|_V^2 \geq 0$ $\quad + K(x,y) = K(y,x)^T$.

Réciproque : complété du pré-Hilbertien.

∎

3. Espace dual d'un RKHS.

Déf : W^* le dual de W : ensemble des formes linéaires continues sur W : $|T(\omega)| \leq C|\omega|$

On le munit de la norme $|T|_{W^*} = \sup_{|\omega|=1} T(\omega)$

Prop : δ_x^α : les formes d'évaluation $\in W^*$.

Déf : Soit
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W : W &\longrightarrow W^* \\ \omega &\longmapsto \mathcal{L}_W(\omega) \;/\; \mathcal{L}_W(\omega)(\omega') = \langle \omega, \omega' \rangle_W \end{aligned}$$

Prop : $\mathcal{L}_W$ est une isométrie de W dans W^*.

Dém : i) $\sup_{|\omega'|=1} |\mathcal{L}_W(\omega)(\omega')| = \sup_{|\omega'|=1} |\langle \omega, \omega' \rangle_W| = |\omega|_W$.

ce qui montre que $\mathcal{L}_W$ est une isométrie de W dans $\mathcal{L}_W(W)$

ii) Soit $T \in W^*$, par Riesz, $\exists\, \omega(T) \in W$ tq. $T(\omega') = \langle \omega(T), \omega' \rangle_W$.

or $\mathcal{L}_W(\omega(T))(\omega') = \langle \omega(T), \omega' \rangle = T(\omega')$ $\forall \omega'$. Donc $T = \mathcal{L}_W(\omega(T))$.

↳ $\mathcal{L}_W$ est surjectif.

Prop : $\cancel{\langle \omega, \omega' \rangle_{W^*} = \langle \mathcal{L}_W(\omega), \mathcal{L}_W(\omega') \rangle_{W^*}}$ La norme sur W^* est dérivée d'un produit scalaire.

et $\langle \omega, \omega' \rangle_W = \langle \mathcal{L}_W(\omega), \mathcal{L}_W(\omega') \rangle_{W^*}$

Dém : $\langle \omega, \omega' \rangle_W = \frac{1}{4}\left(\|\omega + \omega'\|^2 - \|\omega - \omega'\|^2 \right)$ et $\|\mathcal{L}_W(\omega)\|_{W^*} = \|\omega\|$.

Prop : On a $T(\omega) = \langle L_W(T), \omega \rangle_W = \langle L_W^{-1}(\omega), T \rangle_{W^*}$.

Les produits scalaires sur W et W^* s'expriment à partir de L_W :

$$\langle \omega, \omega' \rangle_W = L_W(\omega)(\omega') = L_W(\omega')(\omega).$$

$$\langle T, T' \rangle_{W^*} = T(L_W^{-1}(T')) = T'(L_W^{-1}(T)).$$

2 Les courants.

le long duquel on peut intégrer un champ L^2 c/ mesure de Lebesgue.

Prop : Soit S une ~~surface~~ courbe rectifiable de dimension 1 (courbe) dans $\mathbb{R}^d$ ~~$\mathbb{R}^3$~~

~~Σ (surface) dans $\mathbb{R}^3$~~.

W un RKHS.

On peut définir : $\forall \omega \in W, \quad S(\omega) = \int_S \omega(x)^T \tau(x)\, dx$

↳ tangente à la courbe.

et $S \in W^*$.

Dém : Existence due à la déf de courbe rectifiable.

On a : $|S(\omega)| \leq \sup_S |\omega(x)^T \tau(x)|\, \lambda(S) \leq C |\omega|_W$ car W est un RKHS.

Donc $S \in W^*$ (Nota : on a aussi $|S(\omega)| \leq C |\omega|_\infty$ si $W \hookrightarrow \mathcal{C}^0_0$

et $S \in$ aussi au dual topologique pour la norme ∞).

Rq : On a plongé l'ensemble des courbes dans W^* qui est un ~~ensemble~~ espace vectoriel.

$$(S_1 + S_2)(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = \int_{S_1 \cup S_2} \_\_\_\_ \quad : \oplus = \text{Union}$$

$$-S(\omega) = \int_S \omega(x)^T (-\tau(x))\, dx \quad : \ominus = \text{inversion du sens de la courbe.}$$

Il manque une norme : on prend la norme sur W^*

- $|S|_{W^*} = \sup_{|\omega|_W \neq 0} \dfrac{|S(\omega)|}{|\omega|_W}$ or $S(\omega) = \int_S \underbrace{\omega(x)^T \tau(x)}_{\langle K(x,\cdot)\tau(x), \omega\rangle_W} dx$

$$= \langle \omega, \int_S K(x,\cdot)\tau(x)\, dx \rangle_W \quad (*)$$

(le sup est atteint pour : $\omega^* = \dfrac{\int_S K(x,\cdot)\tau(x)\, dx}{|\int_S K(x,\cdot)\tau(x)\, dx|}$) ~~$= K_W^{-1}(S)$~~

Et $|S|^2_{W^*} = \langle \int_S K(x,\cdot)\tau(x)\, dx, \int_S K(y,\cdot)\tau(y)\, dy \rangle = \int_S \int_S \tau(x)^T K(x,y)\, \tau(y)\, dx\, dy.$

~~$= |K_W^{-1}(S)|^2_W$~~

On remarque que (*) implique que $K_W^{-1}(S) = \int_S K(x,\cdot)\tau(x)\,dx$

le représentant de S dans W^*.

Et on vérifie qu'on a bien : $|S|^2_{W^*} = |K_W^{-1}(S)|_W$.

- ~~Cette norme~~ Le produit scalaire associé : $\langle S, S' \rangle_{W^*} = \langle K_W^{-1}(S), K_W^{-1}(S') \rangle$

$$= \int_S \int_{S'} \tau'(x)^T K(x,y)\, \tau(y)\, dx\, dy$$

- Et la distance entre S et S' : $\|S - S'\|^2_{W^*} = \langle S - S', S - S' \rangle_{W^*}$

$$= |S|^2 + |S'|^2 - 2\langle S, S' \rangle$$

union des 2 courbes

↳ pas de correspondance de points !

On peut même faire des ensembles de courbes : $S = \sum_i S_i$, $S' = \sum_j S'_j$ } # différence

$$\left| \sum_i S_i - \sum_j S'_j \right|^2 = \dots$$

- Interprétation : $|S - S'|^2 = \sup_{|\omega| \neq 1} |S(\omega) - S'(\omega)|$ Trouver le champ de vecteurs qui sépare au mieux les 2 courbes.

Si on prend une norme trop faible, ie. $|\omega|_\infty$ on peut toujours trouver un champ de vecteurs qui sépare

$\omega(x) = \frac{\tau(x)}{|\tau(x)|}$ le long de S

$\omega(x) = -\frac{\tau'(y)}{|\tau'(y)|}$ le long de S'

et $|S - S'|^2 = \text{longueur}\,((S \cup S') \setminus (S \cap S'))$

petit ssi parfaite superposition (pas robuste au bruit)

~~cont~~ ~~constant~~ constant dès que $S \cap S' = \emptyset$ (pas très sensible).

En prenant $\|w\|_W$ dans un RKHS on pénalise les gds fréquences (ie les dérivées de w)

↳ comportement plus régulier de la norme.

⟶ ILLUSTRATIONS (translat° / bruit)

Prop : S une surface rectifiable dans $\mathbb{R}^3$

$$S(w) = \int_S w(x)^T n(x) \, dx$$

(vient du fait que $w(x)(v_{1,x} \wedge v_{2,x})$

$= w(x)^T \underbrace{(v_{1,x} \wedge v_{2,x})}_{n(x)}$).

et $S \in W^*$.