Comme g est compatible, $\frac{d}{dt} g(P_i(t), P_j(t)) = 0$

et $$\frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = \sum_{i,j} \frac{d}{dt}(V^i(t) W^j(t))\, g(P_i(t), P_j(t))$$

$$= \sum_i \left(\frac{dV^i(t)}{dt} W^j(t) + V^i \frac{dW^j(t)}{dt} \right) g(P_i(t), P_j(t))$$

$$\nabla_{\dot\gamma} V = \sum_i \nabla_{\dot\gamma} V^i(t)\, P^i(t) + V^i(t) \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} P^i(t)}_{\Rightarrow}$$

$$= \frac{dV^i(t)}{dt} P^i(t) \qquad \sum \frac{\partial V^i(\gamma(t))}{\partial x^j} \dot\gamma^j(t)$$

$$\nabla_{\dot\gamma} W^j = \frac{dW^j}{dt} P^j(t)$$ D'où le résultat.

<u>Prop:</u> ∇ compatible avec g $\Longleftrightarrow$ $X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

<u>Démonstration:</u> Soit γ une courbe de M t.q. $\dot\gamma(t_0) = X(\gamma(t_0))$

alors
- $X g(Y,Z) = \frac{d}{dt} g(Y(\gamma(t_0)), Z(\gamma(t_0)))$
- $\nabla_X Y = \nabla_{\dot\gamma} Y$ et $\nabla_X Z = \nabla_{\dot\gamma} Z$

et de l'égalité on déduit que ∇ est compatible et si g est compatible alors on a l'égalité.

<u>Def:</u> Une connexion affine ∇ est symétrique ssi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall (X,Y) \in \mathcal{X}(M)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \quad \text{et donc} \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \forall i,j.$$

Théorème (Levi-Civita) :

Pour M variété Riemannienne, il existe une unique connexion affine qui
- est symétrique
- est compatible avec la métrique g.

On l'appelle la connexion de Levi-Civita.

Preuve : Si ∇ est symétrique et compatible :

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \qquad (i)$$
$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \qquad (ii)$$
$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \qquad (iii)$$

(i) + (ii) − (iii)

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle Z, \underbrace{\nabla_X Y + \nabla_Y X}_{[X,Y] + 2\nabla_Y X}\rangle$$

$$= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

D'où $\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big\{ X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle \Big\}$

On peut vérifier que cette expression de la connexion est bien symétrique et compatible.

On a donc pour $X = \partial/\partial x^i$, $Y = \partial/\partial x^j$, $Z = \partial/\partial x^k$.

$$\sum_p \Gamma_{ij}^p g_{pk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

notation pour l'inverse de la métrique.

et $$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_p g^{kp}\left(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\right)}$$

Les symboles de Christoffel s'expriment explicitement en fonction de la métrique.

On peut avoir les lois de la q expérimentales, son pour recommencer à un système de repère où les Christoffel sont nuls !

VIII - Géodésiques :

Déf : une courbe paramétrée sur M : $\gamma : I \to M$ est une géodésique sur I ssi $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ sur I.
∇ connexion Levi-Civita.

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = \sum_k \left(\ddot\gamma^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot\gamma^i \dot\gamma^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy^k}{dt} = v^k \\ \dfrac{dv^k}{dt} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^i v^j \end{cases}$$

ODE admette une solution sur un voisinage de la condit° initiale

Prop : $\frac{d}{dt} g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 2 \langle \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = 0$. les géodésiques sont parcourues à vitesse constante.

[géodésique = accélération nulle : c'est l'équivalent des droites sur une variété quelconque.]

donc $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma|_g^2 \, dt = c(t - t_0)$. Si $|\dot\gamma|_g = 1$ on parle de géodésiques normalisées.

Prop : Homogénéité des géodésiques :

Soit $\gamma(t, q, v)$ la géodésique vérifiant sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, $\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0 \\ \gamma(t_0) = q \\ \dot\gamma(t_0) = v \end{cases}$

Alors $\forall a > 0$, $\gamma(t, q, av)$ est définie sur $\left]\frac{t_0 - \delta}{a}, \frac{t_0 + \delta}{a}\right[$

et vaut $\gamma(t_0 + a(t - t_0), q, v)$

Preuve : Soit $h(t) = \cancel{\gamma(at, q, v)}$ $\gamma(t_0 + a(t - t_0), q, v)$ $\quad h(t_0) = q \quad h'(t_0) = a\gamma'(t_0) = av$

$$\nabla_{\dot h} \dot h = \left(\sum_k \ddot h(t)^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k h^i(t) h^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = a^2 \, \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma(t_0 + a(t - t_0), q, v) = 0.$$

Par unicité des géodésiques $h(t) = \gamma(t, q, av)$.

On note $\mathrm{Exp}_q(v)$ l'application : $\underbrace{B_\varepsilon(0)}_{\text{boule de rayon } \varepsilon} \subset T_qM \longrightarrow M$

$v \qquad \mathrm{Exp}_p(v) = \gamma(1, p, v)$

$= \gamma(|v|, p, \frac{v}{|v|})$

<u>Prop</u> : $\exists \varepsilon > 0$, $\mathrm{Exp}_q : B_\varepsilon(0) \to M$ est un difféomorphisme de $B_\varepsilon(0)$ sur un ouvert de M.

On note alors $\mathrm{Log}_p(q) = v$ ~~le log~~ l'application inverse.

<u>Démonstration</u> : $(d_{v=0} \mathrm{Exp}_p)(\underset{T_pM}{h}) = \frac{d}{d\varepsilon} \mathrm{Exp}_p(0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \gamma(1, p, \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$

$= \frac{d}{d\varepsilon} \gamma(\varepsilon, p, h)\Big|$ par homogénéité des géodésiques

$= h$

D'où $d_{v=0} \mathrm{Exp}_p = \mathrm{Id}_{T_p(M)}$ diffeo par th ~~des~~ d'inversion locale.

On a donc $\mathrm{Exp}_p(0) = p$ $\quad d_0 \mathrm{Exp}_p = \mathrm{Id}$: d'où le nom exponentielle.

Les géodésiques sont les courbes d'énergie minimale.

Déf: L'énergie cinétique d'une courbe $\gamma : I \to M$ est $\frac{1}{2}\int_I g(\dot\gamma, \dot\gamma)\,dt$

Prop: la courbe qui réalise $\min\limits_{\substack{\gamma:[0,1]\to M \\ \gamma(0)=a \\ \gamma(1)=b}} \int_0^1 |\dot\gamma|_g^2\,dt$ vérifie $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ (c'est une géodésique).

Lemme: Soit $S(u,v)$ une ~~surface~~ famille de courbe à 2 paramètres sur M ~~diff~~
$S : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \to M$.

avec S différentiable.

$\frac{\partial S}{\partial u}$ définit un champ de vecteurs le long de $u \to S(u,v)$

$\frac{\partial S}{\partial v}$ ——————————— $v \to S(u,v)$

On a $\left[\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}\right] = 0$ ou de manière équivalente $\nabla_{\frac{\partial S}{\partial u}} \frac{\partial S}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial S}{\partial v}} \frac{\partial S}{\partial u}$

Démonstration: Dans une carte $S(u,v) = (x^1(u,v), \dots, x^n(u,v))$

$$\frac{\partial S}{\partial u}(f) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \text{pour } f(x^1(u,v), \dots, x^n(u,v))$$

d'où
$$\nabla_{\frac{\partial S}{\partial u}}\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right) = \sum_i \nabla_{\frac{\partial S}{\partial u}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

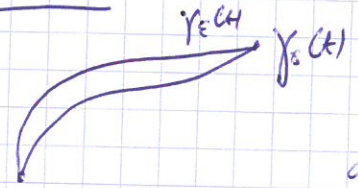
+ simple: $\frac{\partial S}{\partial u}\left(\frac{\partial S}{\partial v}(f)\right) = \frac{\partial S}{\partial u}\left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$
$= \sum_{i,j} \frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v}}_{\text{car}} + \frac{\partial x^i}{\partial v}\sum_j \underbrace{\nabla_{\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{= \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u} \nabla_{\partial/\partial x^j} \partial/\partial x^i}$$

$$= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v} + \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial v}\frac{\partial x^j}{\partial u}\underbrace{\nabla_{\partial/\partial x^j}\partial/\partial x^i}_{\text{par symétrie } = \nabla_{\partial/\partial x^i}\partial/\partial x^j}$$

D'où l'égalité.

Démonstration :



$\gamma_\varepsilon(t)$ / $\gamma_\varepsilon(a)=a$ $\gamma_\varepsilon(b)=b$.

donc : $\left.\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=1} = 0$

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_0^1 g(\dot\gamma_\varepsilon, \dot\gamma_\varepsilon)\, dt = 2\int_0^1 g\left(\nabla_{\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}} \frac{d\gamma_\varepsilon}{dt}\Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\gamma_0}{dt}\right) dt$$

car ∇ est compatible avec la métrique.

D'après le lème $\nabla_{\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}} \frac{d\gamma_\varepsilon}{dt} = \nabla_{\dot\gamma_\varepsilon} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}$

$$= 2\int_0^1 g\left(\nabla_{\dot\gamma_\varepsilon} \left.\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \dot\gamma_0\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} g\left(\left.\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \dot\gamma_0\right) - g\left(\left.\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \nabla_{\dot\gamma_0} \dot\gamma_0\right)\right) dt$$

$$= -\int_0^1 g\left(\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}, \nabla_{\dot\gamma_0} \dot\gamma_0\right)\Big|_{\varepsilon=0} dt$$

Donc si $\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_0^1 |\dot\gamma_\varepsilon|^2 dt = 0$ pour toute variation, alors $\nabla_{\dot\gamma_0} \dot\gamma_0 = 0$

Formulation Lagrangienne des géodésiques : (Eq. d'Euler Lagrange)

Prop : Soit γ une géodésique sur $[0,1]$ (i.e. courbe extremale pour $E(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$)

Soit le lagrangien : $\mathcal{L}(\gamma, \dot\gamma) = g_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma)$

Alors γ est solution de : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\gamma} = 0$

Démonstration : En écrivant le Lagrangien dans une carte : $\gamma = (x^1, \dots, x^n)$

$\dot\gamma = (\dot x^1, \dots, \dot x^n)$

$$\mathcal{L}(x, \dot x) = \sum_{i,j} g_{ij}\, \dot x^i \dot x^j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot x^i \dot x^j \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^k} = 2 \sum_i g_{ki} \dot x^i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^k} = 2\left(\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \dot x^j \dot x^j + \sum_i g_{ki} \ddot x^i \right)$$

D'où
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^k} = \underbrace{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - 2 \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right) \dot x^i \dot x^j}_{= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) \dot x^i \dot x^j} - 2 \sum_i g_{ki} \ddot x^i$$

$$= 2\left(-\sum_i g_{ki} \ddot x^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) \dot x^i \dot x^j \right)$$

$$\sum_k g^{\ell k} \left(\quad \right) = -2 \underbrace{\left(\ddot x^\ell + \frac{1}{2} \sum_{k,i,j} g^{\ell k} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot x^i \dot x^j \right)}_{\ddot x^\ell + \frac{1}{2} \Gamma^\ell_{ij} \dot x^i \dot x^j}$$

Formulation Hamiltonienne des géodésiques :

- Soit $(T_pM)^*$ le dual de (T_pM), i.e. l'espace co-tangent des formes linéaires sur T_pM.

  Si $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ est une base de (T_pM), alors dx^i défini par $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij}$ est une base de $(T_pM)^*$.

  [en écriture vectorielle $\frac{\partial}{\partial x^i} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad dx^i = (0 \ldots 1, \ldots 0)$]

- Le Lagrangien s'écrit $\frac{1}{2} g_p(v,v)$ pour $v \in T_pM$.

  On peut considérer la forme linéaire $q_v : u \in T_pM \longrightarrow g_p(u,v)$

  Pour $u = \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad q = \sum_i q_i dx^i$

  Alors, $q(u) = \sum_i u^i q_i = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$ $\quad$ D'où $\boxed{q_i = \sum_j g_{ij} v^j}$

  (la métrique fait baisser les indices).

  $\boxed{q_v \text{ est le moment : } g_v \text{ masse, } v \text{ vitesse.}}$

- On peut exprimer le Lagrangien en fonction de p et q au lieu de p et v.

  $$\frac{1}{2} g_p(v,v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} v^i v^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} q_i q_j \quad \text{où } [g^{ij}] \text{ inverse de } (g_{ij})$$

  $$\underline{v^T G v = q^T G^{-1} q \quad \text{si } q = Gv.}$$

  On prend le nom d'Hamiltonien : $H(p,q) = \frac{1}{2} \underbrace{g_p^*}_{\text{co-métrique dont les coeff dans une base sont les coeff de } G^{-1}}(q,q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} q_i q_j$

<u>Prop</u> : Le long d'un chemin géodésique, on a :

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{et} \quad \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

<u>Démonstration</u> : Dans une carte : $p = (x^1, \dots, x^n)$ $\quad q = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\dot{x}^i = \sum_j g^{ij} \alpha_j \qquad \dot{\alpha}_k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \alpha_i \alpha_j$$

j'inverse

$$\alpha_k = \sum_i g_{ki} \dot{x}^i \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}_k = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^i \right) + g_{ki} \ddot{x}^i$$

$$\text{et} \quad \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \alpha_i \alpha_j = \sum_{i,j} \sum_{r,s} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} g_{ir} \dot{x}^r g_{js} \dot{x}^s$$

$$= \sum_{r,s} \underbrace{\left(\sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} g_{ir} g_{js} \right)}_{-\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}} \dot{x}^r \dot{x}^s$$

(dérivée de G^{-1}) et $dG^{-1} = -G^{-1} dG\, G^{-1}$

D'où : $$\sum_i \underbrace{\left(\sum_j \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j \right)}_{\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \sum_{i,j} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j \right)} + g_{ki} \ddot{x}^i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

qui est l'équation des géodésiques.

Résumé : 3 formulations des géodésiques :

1/ Christoffel : $\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$

2/ Euler-Lagrange : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0$ pour $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} g_x(\dot{x},\dot{x})$

3/ Hamiltonienne : $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial q}$ $\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ pour $H(x,q) = \frac{1}{2} g^*_x(q,q)$.

1/ Avantage : expressions analytique.
implémentable de manière générique en utilisant :
- différentiation automatique
- solveur d'ODE.

Inconvénients : donne rarement des équations facilement intégrable à la main.
nombre de Christoffel explose avec la dimension.

2/ Avantage : donne souvent les équations diff les + facilement intégrable à la main.

Inconvénient : pas implémentable ~~aussi~~ facilement de manière générique → nécessité des manipulations symboliques.

~~3/ Avantage :~~

3/ Avantage : Equations du 1er ordre (+ facile à intégrer numériquement)

Inconvénients : donne l'évolution dans le co-tangent. ~~peut ne~~
- compliqué si on connaît G dans une carte mais G^{-1} nécessite l'inversion d'une (grosse) matrice.
- Mais il y a des situations où on connaît G^{-1} et pas G.
  ↳ métrique.

IX. Exemples

- $\mathbb{R}^N$, $g = Id$. $\quad \Gamma_{ij}^k = 0$. (métrique plate)

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Rightarrow \ddot\gamma = 0 \qquad \gamma(t) = \dot\gamma_0 t + \gamma_0.$$

les géodésiques sont des droites.

v un vecteur // à $\gamma(t)$ quelconque : $\nabla_{\dot\gamma} v = \dfrac{dv(\gamma(t))}{dt} = 0 \qquad \underline{v = v_0}$

- Sphère : $g_{\theta,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$

quitte à changer de carte on peut chercher les géodésiques avec conditions initiales

$$\begin{pmatrix} \theta(0) = \pi/2 \\ \varphi(0) = 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\dot\varphi(0) = 0}.$$

<u>Approche Lagrangienne :</u> $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}\right) = \dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = 0 & \qquad \dfrac{d}{dt}\dot\theta = \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = 0 & \qquad \dfrac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\,\dot\varphi\right) = 0. \end{cases}$$

$\sin^2\theta\,\dot\varphi = \dfrac{C}{\cancel{\sin\theta}} \qquad \dot\varphi(0) = 0 \Rightarrow C = 0. \quad$ et $\underline{\dot\varphi = \varphi_0}$.

$\ddot\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = \dot\theta_0 t + \theta_0.$

$$\boxed{\text{grd cercle parcouru à vitesse angulaire constante}}$$

Et par chgt de coord, les géodésiques sont des grands cercles.

- <u>Approche par Christoffel</u>

Seul $\frac{\partial g}{\partial \theta}_{\varphi\varphi} \neq 0$ $\qquad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = +\tan\theta$

$$\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2\tan\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2\,\frac{\sin\theta\,\dot{\theta}}{\cos\theta} = +2\frac{d}{dt}\log\cos\theta \qquad \dot{\varphi} = \frac{C}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\log\dot{\varphi}$$

$\varphi(0) = 0 \qquad C = 0.$

- Ne pas oublier qu'on a toujours la conservation de la vitesse : $\frac{d}{dt}\mathcal{L} = 0$

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = v_0^2$$

en 0 : $\dot{\theta}_0 = v_0^2$ et $\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0.$

Si $\theta(0) = \pi/2$ $\qquad \dot\theta(0) = 0 = \frac{2}{\cos^2} + C$ $\qquad$ D'où $C = -2$

$\dot\theta(0) = 0$

et $\dot\theta^2 = 2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = 2\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$\underbrace{\frac{\cos\theta\,\dot\theta}{\sin\theta}}_{\frac{d}{dt}\log\sin\theta} = \pm\sqrt{2} \qquad \sin\theta = B\,e^{\pm\sqrt{2}t}$$

$$\dot\theta(0)\cos\theta(0) = \pm\sqrt{2}B = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}$$

et $\underline{\theta(t) = \pi/2}$ $\qquad$ et $\dot\varphi = \frac{A}{\cos^2\theta} = A$ $\qquad$ $\underline{\varphi(t) = At + B}$

Hyper-plan de Poincaré : $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$

$$g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(y,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 0 \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{x}}{y^2}\right) = 0 \\[2ex] -\dfrac{2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{y^3} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2\dot{y}}{y^2}\right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\ddot{y}}{y^2} - \frac{2\dot{y}^2}{y^3} + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^3} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} + \dfrac{\dot{x}^2-\dot{y}^2}{y} = 0 \\[2ex] \cancel{\ddot{x} = 2\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{y}} \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right) = \cancel{\frac{\ddot{x}}{y} - 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y^3}} \qquad \cancel{\Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}}_{\frac{d}{dt}\log \dot{x}} = \underbrace{2\frac{\dot{y}}{y}}_{\frac{d}{dt}\log y^2}} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = \alpha y^2}$$

1er cas : $\alpha = 0$ $\quad \dot{x} = 0 \quad x = x_0$

et $\ddot{y} - \dfrac{\dot{y}^2}{y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\ddot{y}}{\dot{y}} = \dfrac{\dot{y}}{y} \Rightarrow \dot{y} = Cy \Rightarrow y = e^{Ct+D}$

$\frac{1}{2}$ Droite verticale. s'approche de 0 à l'∞.

$\Rightarrow$ Singularité de la métrique permet de définir des géodésiques qui ne sortent pas du domaine.
Intérêt pour l'analyse de données afin de réaliser des opérations qui ne sortent jamais de la variété considérée (i.e. des observations admissibles)

2e cas : $\alpha \neq 0$ $\quad \cancel{\ddot{y} + (\alpha^2 - 1)\dfrac{\dot{y}^2}{y} = 0}$.

La vitesse est conservée le long des géodésiques. On a donc $\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2} = V_0^2$

et donc $\dot{y}^2 = y^2(V_0^2 - \alpha^2 y^2)$ et $\dot{y} = \varepsilon y \sqrt{V_0^2 - \alpha^2 y^2}$ $\quad \varepsilon = \pm 1$.

on a donc $\dfrac{\dot{y}}{\alpha y^2\sqrt{\frac{V_0^2}{\alpha^2 y^2}-1}} = \varepsilon$

$\cosh = (e^t + e^{-t})/2$

$\operatorname{acosh} = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ $x>1$

$\operatorname{acosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

si $z = \dfrac{V_0}{\alpha y}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{V_0}\underbrace{\dfrac{-\dot{z}}{\sqrt{z^2-1}}}_{-\frac{d}{dt}\operatorname{acosh}(z)} = \varepsilon$

D'où

$$\operatorname{acosh}(z) = -V_0\,\varepsilon(t-t_0) \quad \text{et} \quad z = \frac{V_0}{\alpha y} = \cosh(-V_0\,\varepsilon(t)) = \cosh(V_0(t-t_0))$$

Et $\boxed{y = \dfrac{V_0}{\alpha\cosh(V_0(t-t_0))}} \xrightarrow[\pm\infty]{} 0$.

De $\dot{x} = \alpha y^2 = \dfrac{\alpha V_0^2}{\alpha^2\cosh(V_0(t-t_0))^2}$ | $\tanh(x)' = \dfrac{1}{\cosh(x)^2}$

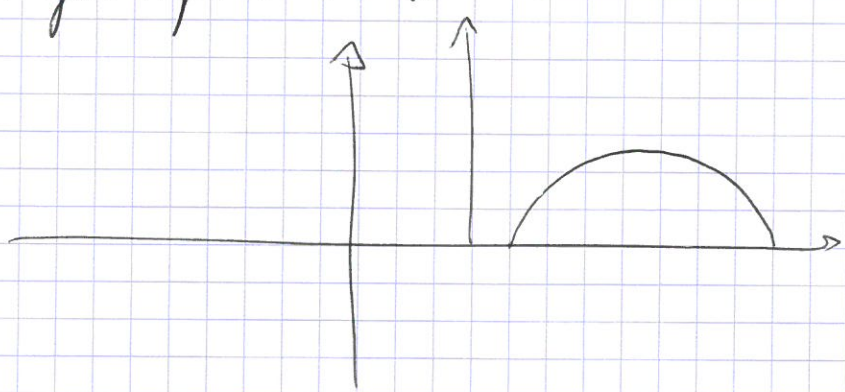
$$= \frac{V_0}{\alpha}\frac{d}{dt}\tanh(V_0(t-t_0))$$

$\boxed{x = \dfrac{V_0}{\alpha}\tanh(V_0 t) + x_0}$ $\boxed{x = \dfrac{V_0}{\alpha}\tanh(V_0(t-t_0)) + x_0}$

On peut vérifier que :

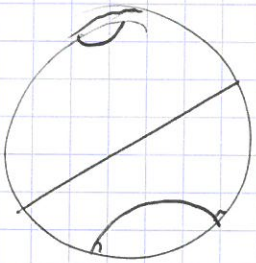
$$\frac{\alpha^2}{V_0^2}\left((x-x_0)^2 + y^2\right) = \frac{1}{\cosh(u)^2} + \tanh^2(u) = \frac{1+\sinh^2 u}{\cosh^2 u} = 1$$

les géodésiques sont des ½ cercles



Disque de Poincaré : $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2=1 \}$

$$g = \frac{1}{1-(x^2+y^2)} \, \mathrm{Id}.$$



Exercice.

Commentaire : Sphère : variété de courbure constante >0 : les géodésiques se rapprochent.
½ plan : ——————— <0 : les géodésiques s'éloignent.

Analyse de chemins :

courbure positive : rend difficile la séparation de points vus dans la carte exponentielle proche du cut. locus.

négative : instabilité de l'exponentielle. Comportement divergent.

↳ numériquement, il faut éviter les endroits de forte courbure.

Les intervalles de $\mathbb{R}$:

Prop : Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$. g une métrique sur I.

$\phi(b) = \gamma(0)$
$a = \dot\gamma(0) / \dot\phi(0)$

Les géodésiques s'écrivent sous la forme : $\gamma(t) = \phi(at + b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et ϕ un difféomorphisme de $I \to \phi(I)$

La fonction ϕ est entièrement déterminée par la métrique par :

$$\phi^{-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{g(u)}\, du + b$$

(de sorte que $\phi^{-1}(\gamma(0)) = b$
$\gamma(0) = \phi(b)$

Démonstration : $\Gamma^{x}_{xx} = \frac{1}{2} \frac{g'(x)}{g(x)}$ $\qquad \frac{1}{2} \frac{1}{g(x)} \left(2g'(x) - g'(x) \right)$

L'eq des géodésiques s'écrivent : $\ddot{x} + \frac{1}{2} \frac{g'(x)}{g(x)} \dot{x}^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \sqrt{g(x)} \right) = 0$ $\qquad -\frac{1}{2} \frac{\dot{x} g'(x)}{g(x)} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$ et $\dot{x} = \frac{a}{\sqrt{g(x)}}$

d'où $\underbrace{\dot{x} \sqrt{g(x)}}_{= \frac{d}{dt} F(x)} = a$ pour $F'(x) = \sqrt{g(x)}$ d'où $F(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{g(u)}\, du + b$

F strictement croissante et inversible et $F(x) = at + c$

donne $x(t) = F^{-1}(at + c)$ la condition initiale $x(0) = x_0$

donne $\underline{c = b}$

Les courbes logistiques :

Pour $I =]0,1[$ et $\cancel{g = \frac{1}{x^2(1-x^2)}}$ $g = \frac{1}{x^2(1-x)^2}$

les géodésiques s'écrivent donc $\phi(at+b)$ où $\phi = F^{-1}$ ou $F(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{g(u)}\,du + b$

$$F'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \qquad F(x) = \log\frac{x}{1-x} + b$$

Puis $y = F(x) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = e^{y-b}$ $\quad x = e^{y-b} - x e^{y-b}$ $\quad (1+e^{y-b})x = e^{y-b}$

$$\text{et } \phi(y) = \frac{e^{y-b}}{1+e^{y-b}} = \frac{1}{1+e^{b-y}}$$

Et les géodésiques s'écrivent : $\gamma(t) = \frac{1}{1+e^{-at-b+c}}$ c'est une <u>courbe logistique</u>

avec les conditions initiales : $\gamma(0) = p_0$, $\dot\gamma(0) = v_0$ $\qquad \gamma(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{p_0}-1\right)e^{-\frac{v_0 t}{p_0(1-p_0)}}}$

<u>Rappelons</u> : $\text{logit}(p) = \log\frac{p}{1-p}$ $\qquad \text{logit}^{-1}(u) = \frac{1}{1+e^{-u}}$.

Pour $p_0 = 1/2$ $\quad \gamma(1) = \frac{1}{1+e^{-4v_0}} = \text{Exp}_{1/2}(v_0) = \text{logit}^{-1}(4v_0)$: logit^{-1} s'interprète comme Exp Riemann en $p_0 = 1/2$.

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{4}\log\frac{\gamma(1)}{1-\gamma(1)} = \text{Log}_{1/2}(\gamma(1))$$

$\Rightarrow \text{Log}_{1/2}(p) = \frac{1}{4}\text{logit}(p)$: logit s'interprète comme le Log Riemannien.

Variétés produits :

Prop : Soit (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes, alors

- $M = M_1 \times M_2$ est une variété
- $T_{p=(p_1,p_2)} M \simeq (T_{p_1} M_1) \times (T_{p_2} M_2)$ isomorphe à,
- La forme $g_{(p_1,p_2)}\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = g_{p_1}(u_1, v_1) + g_{p_2}(u_2 v_2)$ pour $u_1 \in T_{p_1} M_1$, $u_2 \in T_{p_2} M_2$

  est bilinéaire symétrique $\forall > 0$ et munit M d'une structure Riemannienne

- La connexion de Levi-Civita associée est telle que $\nabla^M_X Y = (\nabla^{M_1}_{X_1} Y_1, \nabla^{M_2}_{X_2} Y_2)$

  pour $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$

- Les géodésiques de M s'écrivent donc $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ où

  γ_1 est une géodésique de M_1

  γ_2 est une géodésique de M_2.

Démonstration : ~~requiert des outils non introduits ici~~ $\frac{d}{dt} f(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \sum_i \alpha_1^i(t) \frac{\partial f}{\partial x^i} + \alpha_2^i(t) \frac{\partial f}{\partial x^{i+N_1}}$

par exemple : $f \in \mathcal{D}_M$ fonction différentiables sur M.

$X \in \mathcal{X}(M)$ champ de vecteur sur M.

$$Xf = \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \cancel{\sum_i X_1 f|_{M_1}(p_1,p_2) + X_2 f|_{M_2}(p_1,p_2)} \quad X_1 f(\cdot, p_2) + X_2 f(p_1, \cdot)$$

où X_1 forme des N_1 coord de X $\quad X_2$ des N_2 dernières coord de X.

~~$X_1 f|_{M_1} \in \mathcal{D}_{M_1}$: doit être "augmenté" pour être dans $\mathcal{D}_M$~~

et $f(\cdot, p_2) \in \mathcal{D}_{M_1}$ $\quad f(p_1, \cdot) \in \mathcal{D}_{M_2}$.