

Outils numériques pour les problèmes inverses

Michel Kern

`Michel.Kern@inria.fr`

INRIA Rocquencourt

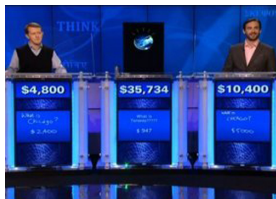
Fédération Charles Hermite
Journée Thématique « Problèmes Inverses »
Mardi 7 juin 2011
Nancy

- 1 Introduction
- 2 Moindres carrés – problèmes mal posés
- 3 Opérateurs intégraux
- 4 Développement en valeurs singulières
- 5 Régularisation
- 6 Autres méthodes

Qu'est-ce qu'un problème inverse ?

Version mathématique du jeu Jeopardy

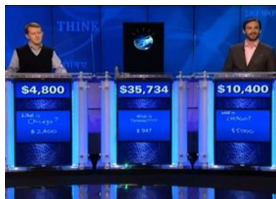
- « 42 »,
- « Combien font 6 fois 7 ? » ou
- « Quelle est la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste » ?



Qu'est-ce qu'un problème inverse ?

Version mathématique du jeu Jeopardy

- « 42 »,
- « Combien font 6 fois 7 ? » ou
- « Quelle est la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste » ?



Recherche de causes connaissant les effets, de structure interne à partir d'observations externes

Qu'est-ce qu'un problème inverse ?

Version mathématique du jeu Jeopardy

- « 42 »,
- « Combien font 6 fois 7 ? » ou
- « Quelle est la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste » ?



Recherche de causes connaissant les effets, de structure interne à partir d'observations externes

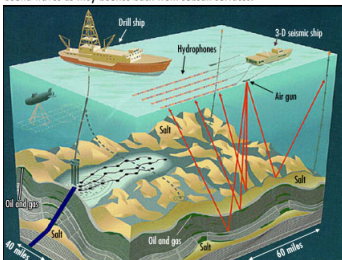
Problème inverse = Ajustement de données guidé par un modèle
W. W. Symes

Où trouve-t-on des problèmes inverses ?

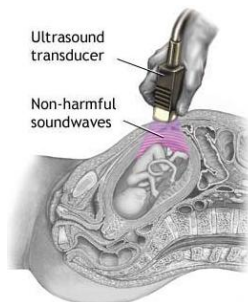
- **Imagerie médicale** Ultrasons, IRM, tomographie, ...
- **Astronomie** Structures stellaires
- **Finance** Calibration

3-D Seismic Imaging At Work

Hydrophones streaming from a 3-D seismic ship record the reflection of sound waves as they bounce back from subsalt surfaces.

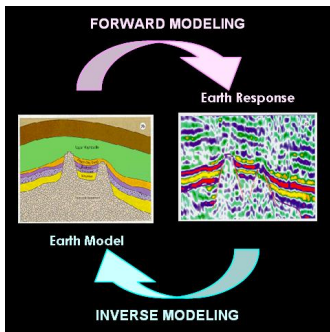


Credit: Hutchins, A.E. and Anderson, R.R. (Eds.), World Oil's 4-D Seismic Handbook, Gulf Publishing, 1997.



- **Sciences de la terre** sismique, prospection pétrolière, structure terrestre, radar géologique, ...
- **Restauration** d'images bruitées

Problème direct – problème inverse



Problème direct Étant donné les causes, trouver l'effet (en général OK, Newton !)

Problème inverse Étant donné un modèle, et des **observations**, retrouver les éléments du modèle (besoin de **contexte**)

Exemple

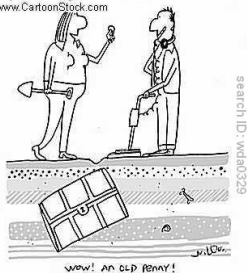
La dérivation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre.

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t) \\ u(0) &= 0 \end{aligned} \iff u(x) = \int_0^x v(t) dt$$

Exemple : gravimétrie

Déterminer un objet enterré à partir de mesures en surface d'anomalie du champ de gravité.

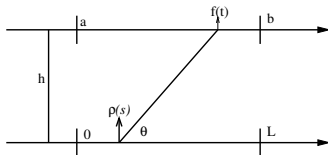
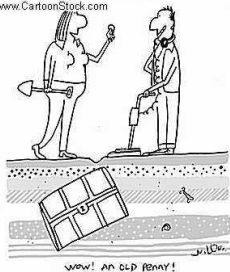
© Original Artist
 Reproduction rights obtainable from
 www.CartoonStock.com



Exemple : gravimétrie

Déterminer un objet enterré à partir de mesures en surface d'anomalie du champ de gravité.

© Original Artist
Reproduction rights obtainable from
www.CartoonStock.com



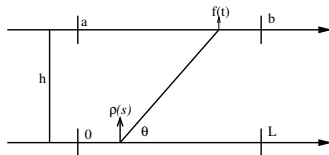
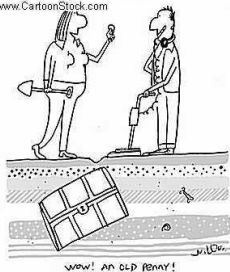
$$f(t) = G \int_0^L \frac{h}{(h^2 + (t-s)^2)^{3/2}} \rho(s) ds$$

ρ densité linéique dans le sol, $f(t)$ mesure de la force verticale

Exemple : gravimétrie

Déterminer un objet enterré à partir de mesures en surface d'anomalie du champ de gravité.

© Original Artist
Reproduction rights obtainable from
www.CartoonStock.com



$$f(t) = G \int_0^L \frac{h}{(h^2 + (t-s)^2)^{3/2}} \rho(s) ds$$

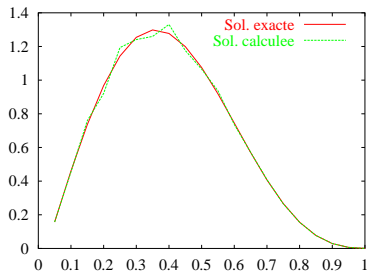
ρ densité linéique dans le sol, $f(t)$ mesure de la force verticale

Problème direct Connaissant ρ , calculer f , **calcul d'intégrale**

Problème inverse À partir de mesures de f , déterminer ρ , **équation intégrale**

Gravitation : calcul naïf

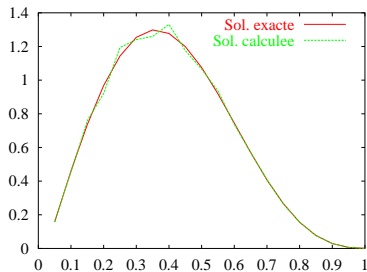
Discrétisation de l'équation intégrale : système linéaire $Ax = b$



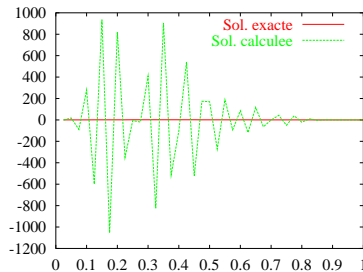
$n = 20,$

Gravitation : calcul naïf

Discrétisation de l'équation intégrale : système linéaire $Ax = b$



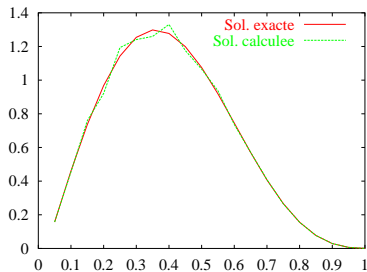
$n = 20,$



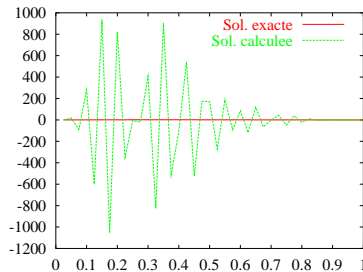
$n = 40$

Gravitation : calcul naïf

Discrétisation de l'équation intégrale : système linéaire $Ax = b$



$n = 20,$



$n = 40$

Le problème inverse est **mal posé**

Problèmes bien et mal posés

E, F espaces de Hilbert, $A : E \rightarrow F$ opérateur linéaire (continu), $b \in F$.

Définition (Hadamard)

Problème $Ax = b$ est **bien posé** ssi

- la solution existe
- la solution est unique
- la solution dépend de manière continue des données

Discussion, problèmes mal posés

Existence Élargir la notion de solution (données ne proviennent pas du modèle, moindres carrés)

Unicité Information a priori (Plusieurs causes, mêmes effets)

Continuité Régularisation (données bruitées, **compromis** résolution – stabilité)

Le problème inverse avec données inexactes

Hypothèse : \hat{b} donnée, \hat{x} solution **exactes**

En pratique, $b = \hat{b} + \eta$, avec $\|\eta\|_F = \delta$, solution x , et $b \notin \text{Im } A$.

Si A injectif, $A^{-1} : \text{Im } A \rightarrow E$,

$$\|x - \hat{x}\|_E \leq \|A^{-1}\| \delta$$

Stabilité $\iff A^{-1}$ continu $\iff \text{Im } A$ fermé dans F .

Exemple (Intégration, $Au = \int_0^t u(s) ds$)

Pour $u_n(s) = \cos(ns)$, $t \in [0, 1]$, alors $Au_n(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$, et

$$\|u_n\|_{L^2} = O(1), \quad \|Au_n\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

L'inverse de A n'est **pas continu**.

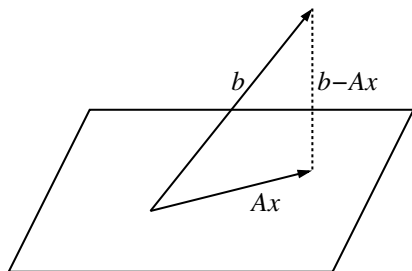
Formulation aux moindres carrés

Étendre la notion de solution :

$$\min_{x \in E} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_F^2$$

Équivalent à $A^* A \hat{x} = A^* \hat{b}$

Solution existe pour $b \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$,
dense dans F .



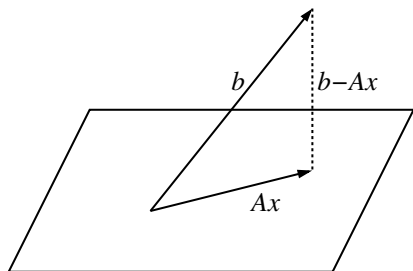
Formulation aux moindres carrés

Étendre la notion de solution :

$$\min_{x \in E} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_F^2$$

Équivalent à $A^* A \hat{x} = A^* \hat{b}$

Solution existe pour $b \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$,
dense dans F .



Méthode numérique

Équation normale $A^T A$ SDP, Cholesky, mais $\kappa(A^T A) = \kappa(A)^2$

Moindres carrés Décomposition $A = QR$, Q orthogonale, R triangulaire, Householder, meilleure stabilité (\backslash dans Matlab / Scilab)

Lien avec les statistiques

Erreurs **aléatoires** sur les mesures (bruit blanc)

$$b = \hat{b} + e, \text{ avec } E(e) = 0, \quad \text{Cov}(e) = E(e^T e) = \delta^2 I,$$

Propriétés statistiques de la solution

Moindres carrés = **regression**

$$E(x) = \hat{x} = (A^T A)^{-1} \hat{b}, \quad \text{Var}(x) = \delta^2 (A^T A)^{-1}$$

Estimateur de la variance $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-n} \|Ax - b\|^2$

Lien avec les statistiques

Erreurs **aléatoires** sur les mesures (bruit blanc)

$$b = \hat{b} + e, \text{ avec } E(e) = 0, \quad \text{Cov}(e) = E(e^T e) = \delta^2 I,$$

Propriétés statistiques de la solution

Moindres carrés = **regression**

$$E(x) = \hat{x} = (A^T A)^{-1} \hat{b}, \quad \text{Var}(x) = \delta^2 (A^T A)^{-1}$$

Estimateur de la variance $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-n} \|Ax - b\|^2$

Théorème (Gauss–Markov)

x est l'estimateur **sans biais** de \hat{x} (ie $E(x) = \hat{x}$) de variance minimale

Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)

Équations intégrales

Definition (Opérateur intégral)

$K \in L^2([c, d] \times [a, b])$ **noyau**,

$$u \rightarrow Au(t) = \int_a^b K(t, s) u(s) ds, \quad t \in [c, d]$$

opérateur linéaire $L^2([a, b]) \rightarrow L^2([c, d])$.

Équation de première espèce $Au = f$,

Équation de seconde espèce $u - \lambda Au = f$, alternative de Fredholm

Exemples

- Opérateurs de Volterra, $Au(t) = \int_0^t k(t, s) u(s) ds$, intégration $k(t, s) = 1$

Adjoint d'un opérateur intégral

Definition

$A^* : F \rightarrow E$ défini de manière unique par

$$(A^*v, u) = (Au, v), \forall u \in E, v \in F$$

Exemple

- $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ matrice, $A^* = A^T$
- A opérateur intégral, A^* est l'OI de noyau $K^*(t, s) = K(s, t)$.

Opérateur de Volterra

$$A^*v(s) = \int_s^1 k(t, s)v(t) dt$$

Les équations de première espèce sont mal posées

Théorème

Un opérateur intégral est compact de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$

Opérateur compact = limite d'opérateurs de rang fini. Un opérateur compact n'est **jamais inversible** sauf en dimension finie

Exemple

Intégration $Au(t) = \int_0^t u(s) ds$

L'inverse de A existe : " A^{-1} " $v(t) = v'(t)$ mais **non borné** sur L^2

En général, lemme de Riemann–Lebesgue $\int_a^b K(t, s) e^{ins} ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Discrétisation des équations intégrales

Méthode de quadrature–collocation

Collocation Équation intégrale vérifiée en nombre fini de points $t_i, i = 1, \dots, m$ (par ex. $t_i = a + (i-1)(b-a)/(m-1)$),

$$\int_a^b K(t_i, s)u(s) ds = f(t_i), \quad i = 1, \dots, m$$

Quadrature Remplacer l'intégrale par une formule de quadrature (p. ex. rectangle, poids $w_j = (b-a)/(n-1)$, noeuds $s_j = a + (j-1/2)(b-a)/(n-1)$)

$$\int_a^b K(t_i, s)u(s) ds \approx \sum_{j=1}^n w_j K(t_i, s_j)$$

Système linéaire $Ax = b$, avec $A_{ij} = w_j K(t_i, s_j)$, $b_i = f(t_i)$

Autre possibilité : méthode de Galerkin

Décomposition en valeurs singulières des matrices

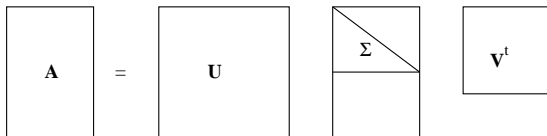
Théorème

Matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Il existe $U \in \mathbf{R}^{m \times m}$, ($U^T U = U U^T = I_m$) et $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, ($V^T V = V V^T = I_n$) orthogonales t.q.

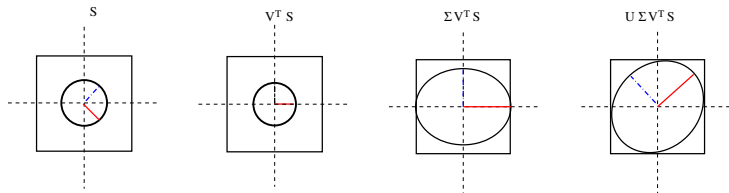
$$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T, \quad (1)$$

où $\Sigma \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Écriture en composantes : $Av_j = \sigma_j u_j$, $A^T u_j = \sigma_j v_j$, pour $j = 1, \dots, n$,
 $A^T u_j = 0$, pour $j = n+1, \dots, m$.



SVD : propriétés et calcul



Propriétés de la DVS

- ① $r = \text{rang de } A = \text{nombre de valeurs singulières non-nulles}$
- ② $\text{Ker } A = \text{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n), \quad \text{Im } A = \text{vect}(u_1, \dots, u_r);$
- ③ $\text{Ker } A^t = \text{vect}(v_1, \dots, v_r), \quad \text{Im } A^t = \text{vect}(u_{r+1}, \dots, u_m);$

Calcul de la SVD

- Matlab / Scilab : `svd`
- Lapack : `xGESVD` / `xGESDD`
- SVDLIBC : matrices creuses
- Gnu SSL, Numpy, ...

http://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

Développement en valeurs singulières pour les opérateurs intégraux

Théorème

$A : E \rightarrow F$ opérateur intégral. Il existe $(\sigma_j)_{j \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}_+$ **decroissante**, $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = 0$, et deux familles **orthonormales** $(v_j)_{j \in \mathbf{N}} \in E$, $(u_j)_{j \in \mathbf{N}} \in F$ tq :

- $Av_j = \sigma_j u_j; \quad A^* u_j = \sigma_j v_j, \quad j \in \mathbf{N}$

- Pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a :

$$Ax = \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j (x, v_j) u_j, \quad A^* y = \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j (y, u_j) v_j$$

La suite $(v_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\text{Ker } A^\perp$, la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\overline{\text{Im } A}$

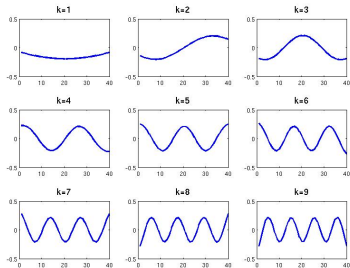
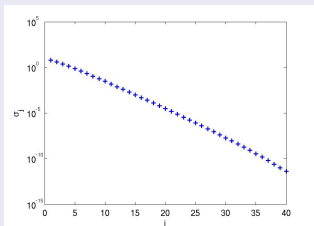
Exemples de décomposition

Intégration

Valeurs singulières $\sigma_j = \frac{2}{\pi(2k+1)}$,

Fonctions singulières $v_j = \sqrt{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}s\right)$, $u_j = \sqrt{2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}s\right)$

Prospection par gravité



Application de la DVS aux équations intégrales

Pour les matrices

Solution de $Ax = b$ par la SVD (A de rang maximum) :

$$x = V^T \Sigma^{-1} U^T b = \sum_j \frac{u_j^T b_j}{\sigma_j} v_j$$

Effet d'une perturbation : $\|\delta x\|_E \leq \frac{1}{\sigma_n} \|\delta b\|_F$

Pour les Équations Intégrales

Pour $b \in F$, la solution de l'EI existe ssi

$$\sum_j \frac{|(b, u_j)|^2}{\sigma_j^2} < \infty \quad \text{Condition de Picard}$$

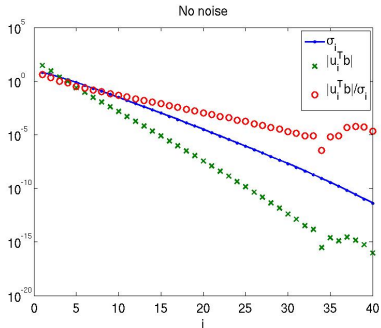
Condition de Picard

Condition de Picard : décroissance des « coefficients de Fourier » plus rapide que celle des valeurs singulières.

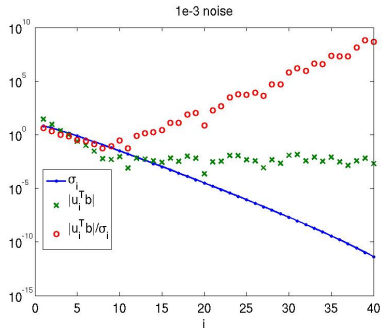
Condition de Picard

Condition de Picard : décroissance des « coefficients de Fourier » plus rapide que celle des valeurs singulières.

Exemple (Gravimétrie)



Pas de bruit



Bruit à 10^{-3}

Méthode de Tikhonov

Definition (Problème régularisé)

$$\min_{x \in E} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - \hat{b}\|_F^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|x\|_E^2 \right\}$$

Formulations équivalentes

Équations normales

$$(A^*A + \varepsilon^2 I)x = A^*b$$

Moindres carrés

$$\min_{x \in E} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \varepsilon I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{F \times E}^2$$

Existence et unicité, solution dépend continûment de b

Comportement de l'erreur

$A\hat{x} = \hat{b}$ problème **exact**, b_δ donnée **bruitée**, $\|b - b_\delta\|_F = \delta$, $x_{\varepsilon,\delta}$ solution régularisée

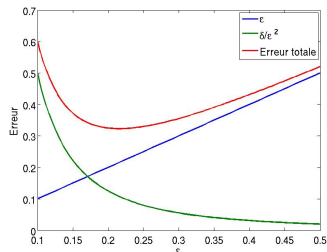
Théorème

Hypothèse (de régularité) $\hat{x} \in \text{Im } A^{ast}$

$$\|x_{\varepsilon,\delta} - \hat{x}\|_E \leq C \left(\frac{\delta}{\varepsilon^2} + \varepsilon \right)$$

Adapter la valeur de ε au niveau de bruit : besoin d'une stratégie de régularisation.

Compromis **stabilité – résolution**



Stratégie de régularisation a priori

Niveau de bruit $\delta \rightarrow 0$. Stratégie de régularisation : $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0$, $x_\delta = x_{\varepsilon(\delta), \delta}$.

Théorème

- $\|Ax_\delta - \hat{b}\|_F \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$
- Si $\delta/\varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, alors $\|Ax_\delta - \hat{b}\|_F = O(\sqrt{\delta})$ et $x_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \hat{x}$.
- si $\delta/\varepsilon(\delta)^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, et $\hat{x} \in \text{Im } A^*$, alors $\|Ax_\delta - \hat{b}\|_F = O(\delta)$ et $\|x_\delta - \hat{x}\|_E = O(\sqrt{\delta})$

Stratégie de régularisation a priori

Niveau de bruit $\delta \rightarrow 0$. Stratégie de régularisation : $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0$, $x_\delta = x_{\varepsilon(\delta), \delta}$.

Théorème

- $\|Ax_\delta - \hat{b}\|_F \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$
- Si $\delta/\varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, alors $\|Ax_\delta - \hat{b}\|_F = O(\sqrt{\delta})$ et $x_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \hat{x}$.
- si $\delta/\varepsilon(\delta)^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, et $\hat{x} \in \text{Im } A^*$, alors $\|Ax_\delta - \hat{b}\|_F = O(\delta)$ et $\|x_\delta - \hat{x}\|_E = O(\sqrt{\delta})$

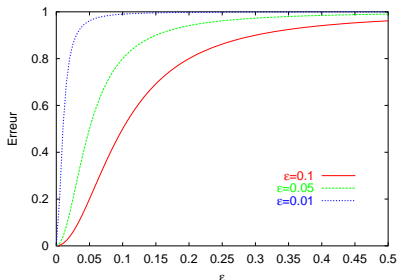
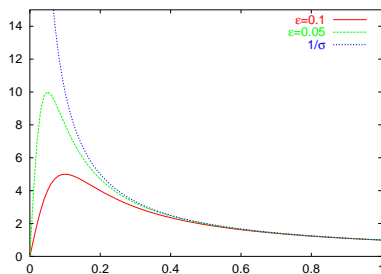
Remarques

- ε doit tendre vers 0 **moins vite** que δ
- Erreur plus grande que le niveau de bruit : **perte d'information**
- Résultat uniquement **théorique**

Régularisation et SVD

Développement de la solution régularisée

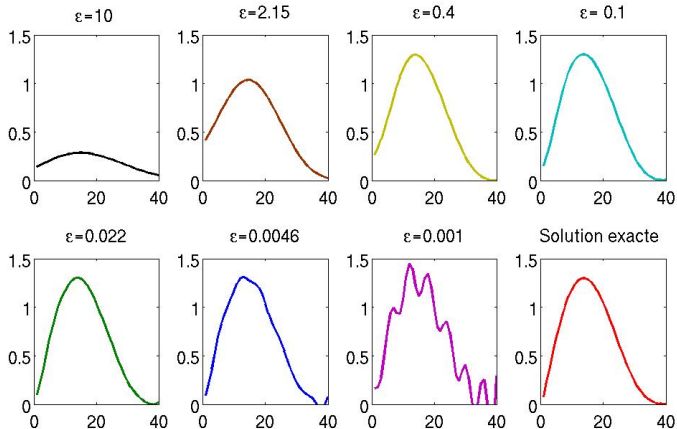
$$x_\varepsilon = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \varepsilon^2} (b, u_j) v_j$$



Effet d'une perturbation $\|\delta x\|_E \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\delta b\|_F$
 Borné indépendamment des valeurs singulières

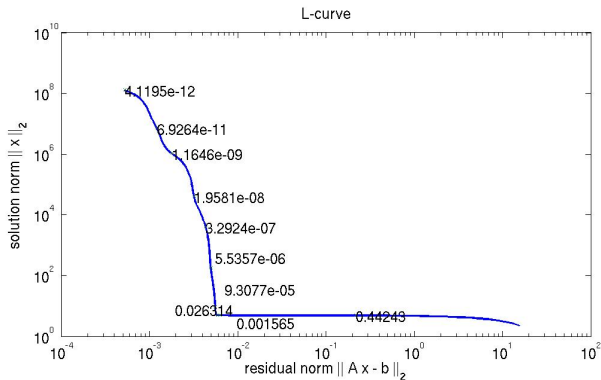
Régularisation en action

Solution pour propension par gravité, différentes valeurs de ε .



Effet du paramètre de régularisation : la courbe en L

$\varepsilon \rightarrow \xi(\varepsilon) = \|x_\varepsilon\|_E$ est **décroissante**, $\varepsilon \rightarrow \rho(\varepsilon) = \|Ax_\varepsilon - b\|_F$ est **croissante**.
 Courbe en L (« L-curve ») : courbe $\varepsilon \rightarrow (\xi, \rho)$



Partie horizontale Trop de régularisation

Partie verticale Pas assez de régularisation

Choix du paramètre de régularisation

Choix a posteriori, basé sur une estimation du niveau de bruit δ . Méthodes heuristiques

Comportement de l'erreur (bis)

Matrice de régularisation $\Sigma_\varepsilon = \text{diag } \sigma_i / (\sigma_i^2 + \varepsilon^2)$,

Erreur $\hat{x} - x_\varepsilon = V(I - \Sigma_\varepsilon)V^T\hat{x} - V\Sigma_\varepsilon\Sigma^{-1}U^T\eta = e_{\text{regul}} + e_{\text{perturb}}$

Chercher le paramètre de régularisation qui rende les deux erreurs de **taille comparable**.

Discrepancy principle ε tq $\|Ax_\varepsilon - b\|_F = \tau\delta$ ($\tau \leq 1$)

L curve « Coin » de la courbe en L

GCV (Validation croisée généralisée) Interprétation statistique

Le « discrepancy principle »

Correspond sur la courbe en L à une ligne verticale située à ε tq

$$\|Ax_\varepsilon - b\|_F = \tau\delta \quad (\tau \leq 1).$$

Exemple

δ	ε	$\ x_\varepsilon - \hat{x}\ _E$	$\ Ax_\varepsilon - b\ _F$
$1.0000 \cdot 10^{-03}$	$1.3999 \cdot 10^{-11}$	$2.8259 \cdot 10^{+07}$	$9.7401 \cdot 10^{-04}$
$3.16231 \cdot 10^{-03}$	$1.2612 \cdot 10^{-08}$	$5.8526 \cdot 10^{+04}$	$3.1386 \cdot 10^{-03}$
$1.0000 \cdot 10^{-02}$	$6.7447 \cdot 10^{-02}$	$7.1205 \cdot 10^{-02}$	$1.0000 \cdot 10^{-02}$
$3.1623 \cdot 10^{-02}$	$1.5057 \cdot 10^{-01}$	$1.2114 \cdot 10^{-01}$	$3.1623 \cdot 10^{-02}$
$1.0000 \cdot 10^{-01}$	$2.8849 \cdot 10^{-01}$	$1.8270 \cdot 10^{-01}$	$1.0000 \cdot 10^{-01}$

Le « discrepancy principle »

Correspond sur la courbe en L à une ligne verticale située à ε tq
 $\|Ax_\varepsilon - b\|_F = \tau\delta$ ($\tau \leq 1$).

Exemple

δ	ε	$\ x_\varepsilon - \hat{x}\ _E$	$\ Ax_\varepsilon - b\ _F$
$1.0000 \cdot 10^{-03}$	$1.3999 \cdot 10^{-11}$	$2.8259 \cdot 10^{+07}$	$9.7401 \cdot 10^{-04}$
$3.16231 \cdot 10^{-03}$	$1.2612 \cdot 10^{-08}$	$5.8526 \cdot 10^{+04}$	$3.1386 \cdot 10^{-03}$
$1.0000 \cdot 10^{-02}$	$6.7447 \cdot 10^{-02}$	$7.1205 \cdot 10^{-02}$	$1.0000 \cdot 10^{-02}$
$3.1623 \cdot 10^{-02}$	$1.5057 \cdot 10^{-01}$	$1.2114 \cdot 10^{-01}$	$3.1623 \cdot 10^{-02}$
$1.0000 \cdot 10^{-01}$	$2.8849 \cdot 10^{-01}$	$1.8270 \cdot 10^{-01}$	$1.0000 \cdot 10^{-01}$

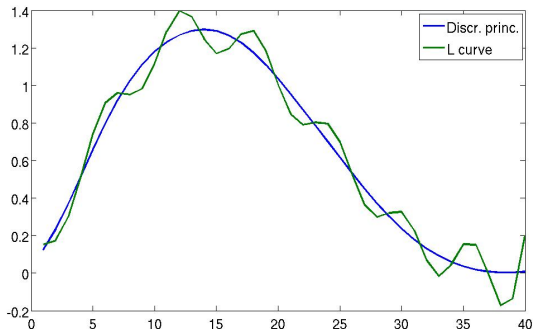
- Besoin d'une estimation **précise** du niveau de bruit !
- Ne pas sous-estimer le bruit !
- Tendance à **sous-estimer** le paramètre optimal

Choix de la régularisation par la L-curve

Localisation du « coin » de la L curve (maximise la courbure).

Tendance à **sous-estimer** ε pour des solutions régulières.

Comparaison des méthodes (gravimétrie) :



Besoin d'expérimenter

Autres méthodes de régularisation

Troncature spectrale

$$x_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_j} u_j^T b v_j \quad \text{pour } k < n$$

Mise à 0 des inverses des petites valeurs singulières

Autres méthodes de régularisation

Troncature spectrale

$$x_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_j} u_j^T b v_j \quad \text{pour } k < n$$

Mise à 0 des inverses des petites valeurs singulières

Méthodes itératives

Landweber

$$x^{k+1} = x^k + \omega A^T (b - Ax^k), \quad x^0 \text{ donné}, \quad 0 < \omega < 2/\sigma_1^2$$

Régularisation : Arrêt des itérations avant la convergence, **semi-convergence**.

Facteurs de filtre $1 - (1 - \omega \sigma_i^2)^k$

Mieux : gradient conjugué, CGLS

Paramètres de régularisation **discrets**

Autres choix de norme : Remplacer $J(u) = \|u\|_E^2$

Semi-normes

Pénaliser des solutions non-régulières :

$$J_2(u) = \int_a^b |u'(t)|^2 dt = - \int_a^b u(t) u''(t) dt \quad (\text{CL Neumann})$$

Version discrète $J_2(x) = x^T Lx$, L rectangulaire. J_2 **semi-norme**

Variation totale

Autoriser des solutions **discontinues** :

$$J_1(u) = \int_a^b |u'(t)| dt$$

Version discrète : $J_1(x) = \sum \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta x} \right|$.

Non-linéaire, non-différentiable.

Autres sujets

- Estimation bayésienne
- Contraintes de positivité
- Restauration d'images : matrices structurées

La Regularisation Toolbox de P. C. Hansen

Boîte à outils Matlab pour la régularisation,

<http://www2.imm.dtu.dk/~pch/Regutools/>.

Décompositions SVD (compacte, généralisée), réduction à la forme standard

Outils d'analyse Condition de Picard

Régularisation Tikhonov, troncature spectrale, méthodes itératives

Exemples Divers,...

Documentation Manuel utilisateur

Utilisé pour les exemples précédents.

Référence :



P. C. Hansen.

Regularizarion tools version 4.0 for Matlab 7.3,.

Numer. Algorithms, pages 189–194, 2007.

Pour en savoir plus I

Par ordre de difficulté croissante



M. Kern.

Problèmes inverses : aspects numériques, 2002

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00168393/fr/>



P. C. Hansen

Discrete inverse problems. Insights and algorithms

SIAM, 2010



C. R. Vogel.

Computational Methods for Inverse Problems.

SIAM, 2002

Pour en savoir plus II



P. C. Hansen.

Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion.

SIAM, 1998.



A. Kirsch.

An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems.

Number 120 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1996.



H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer.

Regularization of Inverse Problems.

Kluwer, Dordrecht, 1996.