

# Analyse numérique avancée – TD 1

M. Kern

11 février 2021

**Thème** : Gradient conjugué – préconditionnement – GMRES

## Exercice 1 : Convergence du gradient conjugué

Soit  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  une matrice définie positive, et  $b \in \mathbf{R}^n$ . On utilise la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système

$$Ax = b.$$

On rappelle que le problème de minimisation

$$(1) \quad \min_{p \in P_k, p(0)=1} \max_{\lambda \in [c,d]} |p(\lambda)|$$

admet une solution  $p_k^*$  qui vérifie l'inégalité suivante (on note  $\kappa = d/c$ .)

$$(2) \quad |p_k^*(\lambda)| \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k$$

**1** Donner une estimation du nombre d'itérations nécessaires pour réduire l'erreur initiale d'un facteur  $\varepsilon$  donné en utilisant la borne simple fournie par le conditionnement.

**2** Dans cette question,  $A$  est la matrice obtenue par discrétisation de l'équation de Laplace sur le carré unité par une méthode de différences finies sur une grille régulière de pas  $h$ .

Donner un équivalent du conditionnement de  $A$  pour  $h$  petit. Comment le nombre d'itérations nécessaire pour réduire l'erreur d'un facteur  $\eta$  donné varie-t-il en fonction de  $h$  ?

**3** On suppose maintenant que les valeurs propres de  $A$ , notées  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  vérifient

$$c \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq d \ll \lambda_n$$

Donner une borne plus précise sur en utilisant cette information, et en déduire une meilleure estimation du nombre d'itérations.

*Indication* : utiliser un polynôme de la forme  $p(\lambda) = (1 - \alpha\lambda)q(\lambda)$  où  $\alpha$  est à choisir, et  $q$  résout un problème de minimisation de même type que 1.

## Exercice 2 : Coût du gradient conjugué

Soit  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  une matrice définie positive.

**1** On suppose d'abord que  $A$  est une matrice pleine. Calculer le coût d'une itération du gradient conjugué appliqué à  $A$ . Comparer le coût total s'il faut  $n$  itérations pour obtenir la solution avec la méthode de Gauss (ou Cholesky).

**2** Maintenant on prend pour  $A$  la matrice du obtenue par discrétisation de l'équation de Laplace sur le carré unité par une méthode de différences finies sur une grille régulière de pas  $h = 1/(N + 1)$ , avec  $N$  entier.

Quel est le coût de la méthode par itération, et quel est le coût total pour réduire l'erreur d'un facteur  $\eta$  (voir exercice précédent) ?

**3** Pourquoi est-il, en théorie, suffisant d'étudier la convergence du gradient conjugué pour des matrices diagonales ? Est-ce le cas en pratique ?

## Exercice 3 : Récurrences à 3 terme et algorithme de Lanczos

**1** En éliminant  $p_k$  et  $p_{k+1}$  dans la définition du gradient conjugué, donner une récurrence à 3 termes entre  $x_{k-1}$ ,  $x_k$  et  $x_{k+1}$ . Préciser les coefficients.

En déduire une récurrence pour les résidus (faisant intervenir  $A$ ).

**2** On normalise les résidus, en posant  $q_k = \frac{r_{k-1}}{\|r_{k-1}\|_2}$ , pour  $k = 1, \dots, n$  (attention au décalage). On définit la matrice  $Q_k = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ .

Montrer que l'itéré  $x_k$  du gradient conjugué vérifie la relation

$$Q_k^T A Q_k y_k = Q_k^T r_0, \quad \text{avec } x_k - x_0 = Q_k y_k$$

Utiliser  $x_k \in x_0 + K_k(r_0)$ , et l'orthogonalité du résidu à l'espace de Krylov.

**3** Réinterpréter la relation de récurrence de la question 1 en faisant intervenir la matrice  $Q$  et une matrice tridiagonale  $T_k$  dont on explicitera les coefficients.

## Exercice 4 : Convergence de GMRES

On utilise GMRES pour résoudre un système linéaire  $Ax = b$ , où  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  est une matrice inversible. On notera  $(e_1, \dots, e_n)$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

**1** Dans la suite, on considère la matrice  $A \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$  dont les colonnes sont  $e_2, e_3, e_4, e_1$ , et le second membre  $b = e_1$ . On démarre les itérations avec  $x_0 = 0$ .

Représenter la matrice. Quelle est la solution exacte du système ?

**2** Déterminer les matrices  $V_k$  produites par l'algorithme d'Arnoldi, les matrices réduites  $H_k$ , pour  $k = 1, \dots, n$ .

En déduire les itérés successifs. Que peut-on dire de la convergence de l'algorithme pour cette matrice ?

Pouvez-vous généraliser le résultat ?

## Exercice 5 : Factorisation incomplète et matrices de différences finies

On considère une matrice tridiagonale par blocs qui intervient dans la résolution d'une équation elliptique en dimension 2 (sur le carré unité, avec un maillage régulier de  $N$  points sur chaque côté), et on considère le cas général où  $A$  n'est pas nécessairement symétrique. On écrit

$$A = L_A + D_A + U_A,$$

où  $D_A$  est la diagonale principale de  $A$ , et  $L_A$  et  $U_A$  sont les parties strictement triangulaires inférieures et supérieures respectivement. Toutes les matrices sont  $n \times n$ , avec  $n = N^2$ .

On veut calculer une factorisation incomplète de  $A$  de la forme

$$M = (L_M + \Delta)\Delta^{-1}(\Delta + U_M),$$

où  $\Delta$  est une matrice diagonale (inversible) et  $L_M$  et  $U_M$  sont triangulaires inférieures et supérieures, à diagonale nulle.

La matrice  $L_M$  n'a que deux diagonales non-nulles, en position  $-1$  et  $-n$ , et de même  $U_M$  n'a que deux diagonales non-nulles, en position  $1$  et  $n$ .

**1** Question préliminaire.

Pour un entier  $-n \leq p \leq n$ , on note  $A_p$  une matrice n'ayant qu'une seule diagonale non-nulle en position  $p$  ( $p = 0$  correspond à la diagonale principale,  $p < 0$  à la partie inférieure,  $p > 0$  à la partie supérieure).

Montrer que  $A_p A_q = A_{p+q}$ . On peut donc trouver l'emplacement du produit de deux matrices diagonales.

**2** Quelles sont a priori les diagonales non-nulles de  $L_M$  et  $U_M$ ? En décomposant  $A$  et  $M$  en somme selon les diagonales, déterminer sans calcul les matrices  $L_M$  et  $U_M$ .

**3** En écrivant l'égalité des diagonales de  $M$  et de  $A$  (pourquoi?), déterminer les éléments de  $\Delta$ . On obtiendra une relation de récurrence, et il est utile de traduire cette relation en écriture à deux indices, en revenant sur la grille.

## Exercice 6 : Opérations avec la matrice transposée en format CSR

Soit  $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$  une matrice **triangulaire inférieure**. On supposera que les éléments diagonaux de  $L$  sont tous égaux à 1.

On veut écrire des algorithmes pour calcul le produit  $A^T x$  et la résolution du système triangulaire  $L^T x = b$  quand ces matrices sont stockées dans le format CSR.

**1** Sans se préoccuper du stockage, écrire un algorithme pour calculer la solution du système  $L^T x = b$  qui accède aux éléments de  $L$  par lignes.

Indication : penser à interpréter le produit  $L^T x$  comme une combinaison linéaire des **colonnes** de  $L^T$ .

**2** Dans cette question  $L$  est stockée sous forme CSR, dans 3 tableaux IL, JL, AL. En utilisant la question précédente, écrire un algorithme pour résoudre le système, en exploitant la structure de données.