

Projet informatique sur ordinateur

La méthode des éléments finis non conforme : convergence illustrant les estimations d'erreur a priori, reconstruction du potentiel, reconstruction du flux équilibré, estimations d'erreur a posteriori et adaptivité de maillage

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polygone. On considère le problème de Poisson avec le terme source $f \in L^2(\Omega)$ et les conditions de Dirichlet possiblement non homogènes, données par une fonction u_D sur le bord $\partial\Omega$ de Ω : trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1a)$$

$$u = u_D \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1b)$$

La solution du problème (1) est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = u_D$ sur $\partial\Omega$ et telle que

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Soit \mathcal{T}_h un maillage de Ω composé de triangles.

Exercice 1. (La méthode des éléments finis non conforme)

L'espace de polynômes faiblement continus de Crouzeix–Raviart de plus bas degré $p = 1$ est donné par

$$V_{h1}^{\text{nc}} = \{v_h \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h); \langle [v_h], 1 \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h\}. \quad (3)$$

Pour pouvoir prendre en compte les conditions de Dirichlet non homogènes, nous aurons également besoin de l'espace un peu plus grand

$$V_{h1}^{\text{nc,b}} = \{v_h \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h); \langle [v_h], 1 \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}\} \quad (4)$$

qui n'impose pas les valeurs zéro aux points milieux \mathbf{x}_F des faces $F \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$ (se trouvant au bord $\partial\Omega$). La méthode des éléments finis non conforme approche u de (2) par $u_h \in V_{h1}^{\text{nc,b}}$ telle que $u_h(\mathbf{x}_F) = u_D(\mathbf{x}_F)$ pour toute face $F \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$ et telle que

$$(\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h1}^{\text{nc}}. \quad (5)$$

1) La matrice de rigidité de (5) est donnée par

$$\mathbb{K}_{FF'}^{\text{nc}} := (\nabla_h \psi^{F'}, \nabla_h \psi^F) \quad F, F' \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$$

pour la base Lagrangienne ψ^F , $F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$, de l'espace V_{h1}^{nc} . Celle-ci est donnée par les fonctions $\psi^F \in V_{h1}^{\text{nc}}$ telles que $\psi^F(\mathbf{x}_F) = 1$ pour la face $F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$ et $\psi^F(\mathbf{x}_{F'}) = 0$ pour toute autre face $F' \in \mathcal{F}_h$, $F' \neq F$, cf. la Figure 1, la Définition 1.6.1 du polycopié et les travaux dirigés N°1. On pourra noter que

$$(\nabla_h \psi^F)|_K = \nabla(\psi^F|_K) = \frac{|F|}{|K|}(\mathbf{n}_K)|_F,$$

où $|F|$ est l'air (longueur) de la face (arrêt) F , $|K|$ est le volume (air) de l'élément K et \mathbf{n}_K est le vecteur unitaire normal sortant de l'élément K . Cette propriété permet une implémentation informatique rapide de la matrice de rigidité.

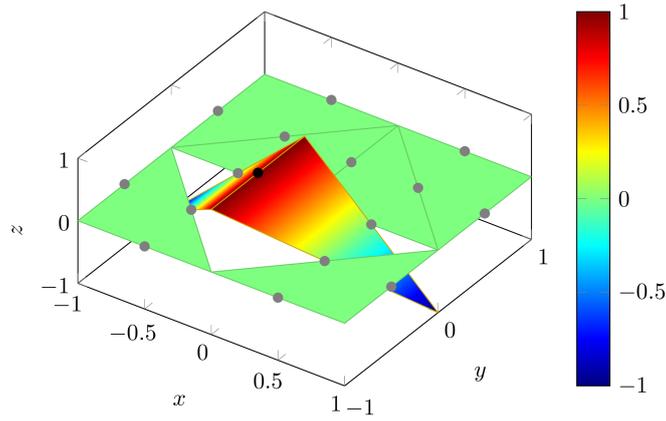


FIGURE 1 – Fonction de base ψ^F de l'espace V_{h1}^{nc} , $d = 2$ et $p = 1$

2) Mettre en œuvre informatiquement la méthode (5) à l'aide du logiciel FreeFem, librement disponible sur <https://freefem.org/>.

3) Un script initial est fourni. Ici, on procède (à titre d'illustration) comme suit :

- (a) `int nds = 5; // number of mesh points on one domain unity edge`
`int FinalLevel = 5; // maximal refinement level`
`macro Pcontp P2 // $H^1(\Omega)$ -conforming pw polynomials for plotting the exact solution : "P2"`
`macro Pcont P1 // $H^1(\Omega)$ -conforming pw polynomials for the potential reconstruction : "P1" or "P2"`
`macro RT RT0 // $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforming pw polynomials for the flux reconstruction : "RT0"`
`macro Pdiscp P2dc // discontinuous pw polynomials for plotting the fluxes and flux reconstruction : "P2dc"`
- (b) `int verb = 0; // verbosity for demonstrations and debugging`
`PlotMesh = 1, PlotSolAppr = 1, PlotSolApprFluxes = 1, PlotPotRec = 1,`
`PlotApprPot = 1, PlotFluxRec = 1, PlotErr = 1, PlotEst = 1; // what to plot`
`bool RunSmooth = 1; // 1 means smooth example, 0 means singular example`
`bool RunAdaptive = 0; // 1 means adaptive mesh refinement, 0 means uniform mesh refinement`
`bool ImposeBC0 = 1; // potential reconstruction : impose boundary values 0 where a homogeneous Dirichlet BC is prescribed`
`real Dtheta=sqrt(0.5); // Dörfler marking parameter`
`int RefFactor=4; // factor by which (approximately) the marked elements should become smaller in the adapted mesh`
- (c) Spécifier la solution exacte u avec ses dérivées, le second membre f et la condition de Dirichlet u_D . Ceci est montré dans la section `exact solution and its derivatives`.
- (d) Générer un maillage triangulaire \mathcal{T}_h de Ω . Pour un carré d'unité, dans FreeFem, cela se fait par la commande `mesh Th = square(nds, nds);`
- (e) Définir l'espace $V_{h1}^{nc,b}$ donné par (4) dans FreeFem : cela se fait via la commande : `fespace VhNC(Th, P1nc);` // piecewise 1st order polynomials on the mesh \mathcal{T}_h , continuous in midpoints of the edges
- (f) Calculer l'approximation par éléments finis u_h donnée par (5). Ceci est réalisé par les commandes

```

VhNC uh,vh; // NCFE approximation and test function
varf a(uh,vh)=int2d(Th)(Grad(uh)'*Grad(vh))
+ int2d(Th)(f*vh) + on(1,2,3,4,uh=gd); // weak form
matrix A=a(VhNC,VhNC,solver=SolverGlob); // construction of the matrix and
choice of the linear algebraic solver
real[int] b=a(0,VhNC); // construction of the right-hand side
uh[]=A^-1*b; // algebraic solve

```

Exercice 2. (Solution exacte régulière)

1) Considérer $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ et la solution exacte

$$u(x, y) = x(x - 1)y(y - 1). \quad (6)$$

Calculer à la main le terme source f correspondant.

2) Considérer d'abord un maillage fixe (`FinalLevel = 0`). Visualiser la solution exacte u et son approximation par les éléments finis non conformes u_h . Ceci est décrit dans le script `FreeFem` dans le bloc `if(PlotSolAppr)`. Dans la fenêtre graphique de `FreeFem`, on peut zoomer par “+” et “-”, on avance par la touche “enter” et on peut revenir en arrière, pour des comparaisons répétitives, via “p”. Essayer différentes tailles de maillages (en variant `nds`), de quelques éléments à centaines de milliers d'éléments.

3) Aux quels espaces fonctionnels (C , L , H , brisés) appartiennent les fonctions u et u_h ?

4) Toujours sur un maillage fixe, tracer le flux de la solution exacte donnée par $-\nabla u$ et le flux de l'approximation par éléments finis donnée par $-\nabla u_h$. Notez que ceux-ci sont des vecteurs (flèches) en chaque point \mathbf{x} de Ω . Tracer aussi les tailles de $-\nabla u$ et $-\nabla u_h$, i.e., $|\nabla u|$ et $|\nabla u_h|$ (ceux-ci sont des scalaires en chaque point \mathbf{x} de Ω). La partie correspondante est décrite dans le script `FreeFem` dans le bloc `if(PlotSolApprFluxes)`. (Dans la fenêtre graphique de `FreeFem`, la taille des flèches est modifiée en appuyant sur “a” et “A”). Essayer différentes tailles de maillages, de quelques éléments à centaines de milliers d'éléments.

5) Aux quels espaces fonctionnels appartiennent les flux $-\nabla u$ (moins le gradient faible de u) et $-\nabla_h u_h$ (moins le gradient faible brisé de u_h) ? Le flux exact $-\nabla u$ semble-t-il être continu sur les faces du maillage, ou au moins avoir la composante normale $-\nabla u \cdot \mathbf{n}_F$ continue sur n'importe quelle face du maillage F ? (Ici, \mathbf{n}_F est un vecteur normal unitaire de F .) Notez que cette dernière propriété, plus faible, signifie que, pour une face de maille donnée F , ce qui “sort” d'un élément de maille partageant F à travers F “entre” dans l'autre élément de maille partageant F . Qu'en est-il de l'approximation du flux $-\nabla u_h$? Est-ce que $-\nabla_h u_h$ en particulier appartient à l'espace $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$?

6) Encore sur un maillage fixe, calculer l'erreur entre la solution exacte u de (2) et son approximation numérique par les éléments finis non conformes u_h de (5), i.e.,

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|. \quad (7)$$

Calculer aussi ses contributions dans chaque élément du maillage $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_K. \quad (8)$$

Visualiser ces contributions par élément. La partie correspondante est décrite dans le script `FreeFem` fourni dans la fonction `func int ErrDist()`. Essayer différentes tailles de maillages, de quelques éléments à centaines de milliers d'éléments (avec `FinalLevel = 0`, en variant `nds`). Qu'observez-vous ?

7) Considérer maintenant une suite de maillages \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$ (en variant `FinalLevel`). Calculer les erreurs $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ sur chaque maillage \mathcal{T}_h . Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ en fonction de h dans un graphe ; ici, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ avec h_K le diamètre du triangle K (son arête la plus longue). Il convient de se servir des échelles log (dans la partie `GRAPHS OF RESULTS`, ceci se fait via la commande `SetupLogLogPlot`). Trouve-t-on

$$\|\nabla_h(u - u_h)\| \leq Ch^\alpha? \quad (9)$$

Pour quelle valeur de α ?

8) Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ aussi en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$, la dimension de l'espace V_{h1}^{nc} , i.e., le nombre de faces intérieures du maillage, dans un deuxième graphe. Observez-vous aussi un comportement de type

$$\|\nabla_h(u - u_h)\| \leq C|V_{h1}^{\text{nc}}|^\beta? \quad (10)$$

Pour quelle valeur de β ?

9) Comment les formules (9) et (10) se comparent ?

Exercice 3. (Solution exacte singulière)

1) Considérer $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ et la solution exacte, en coordonnées polaires et avec $\theta \in (0, 3\pi/2)$ (attention, il faut éviter les coordonnées polaires avec θ entre $-\pi$ et π)

$$u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3). \quad (11)$$

Vérifier que le terme source correspondant est $f = 0$ dans (1a), alors que la condition de Dirichlet u_D est donnée par

$$u_D := r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3) \text{ sur } \partial\Omega. \quad (12)$$

2) Reprenez la question 2) de l'Exercice 2.

3) Reprenez la question 4) de l'Exercice 2. Examinez en particulier le point $(0, 0)$ et son voisinage. Qu'observez-vous ?

4) Considérer une suite de maillages \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$ et reprenez le point précédent.

5) Quels sont les valeurs de $-\nabla u$ et $|\nabla u|$ dans le point $(0, 0)$? Calculez à la main et comparez à ce que vous avez observé dans les deux points précédents. Cherchez des explications. (Attention, FreeFem fait des approximations parfois).

6) Reprenez la question 6) de l'Exercice 2.

7) Considérer une suite de maillages \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$. Calculer les erreurs $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ sur chaque maillage. Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ en fonction de h et de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$ dans deux graphes. Il convient à nouveau de se servir des échelles log. Observez-vous (9) et/ou (10) ? Pour quels exposants α et β ?

Exercice 4. (Reconstruction du potentiel)

1) Mettre en œuvre informatiquement la procédure de reconstruction du potentiel s_h selon la Définition 2.3.1 du polycopié. Attention, une modification est à apporter pour la condition de Dirichlet non homogène (12). Alternativement, au bord $\partial\Omega$, on pourra aussi plutôt prendre la valeur moyenne de toutes les valeurs dans les points de Lagrange. Des idées de comment procéder sont données dans le script FreeFem fourni dans le bloc `func int ComputPotRec()`.

2) Comparer u_h et s_h graphiquement pour les deux cas test des Exercices 2 et 3. Qu'observez-vous ? Vous pourrez aussi visualiser la différence $u_h - s_h$ (une bonne idée est d'utiliser l'espace `Pdiscp` dans ce but).

Exercice 5. (Reconstruction du flux équilibré)

1) Mettre en œuvre informatiquement la procédure de reconstruction du flux équilibré σ_h selon la Définition 3.1.1 du polycopié. Attention, il faudra remplacer $f|_K$ par la valeur moyenne de f sur l'élément K dans le premier cas test. Dans ce but, la projection L^2 orthogonale de f sur de polynômes discontinus par morceau est préparée dans le script `FreeFem`, bloc `func int Projf()`.

2) Comparer $-\nabla_h u_h$ et σ_h graphiquement pour les deux cas test des Exercices 2 et 3.

Exercice 6. (Estimations d'erreur a posteriori)

1) Mettre en œuvre informatiquement les estimations d'erreur a posteriori selon le Théorème 4.3.1 du polycopié. On ignorerait que $f \notin \mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)$ dans le premier cas test et que $u|_{\partial\Omega} \neq 0$ dans le deuxième cas test.

2) Tracer l'erreur $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ et l'estimateur $\eta(u_h)$ en fonction de $|V_{h1}^{nc}|$ dans un graphe, pour chacun des deux cas test des Exercices 2 et 3. Il convient à nouveau de se servir des échelles log. Qu'observe-t-on ?

3) Tracer l'indice d'efficacité

$$I_{\text{eff}} := \frac{\eta(u_h)}{\|\nabla_h(u - u_h)\|} \quad (13)$$

en fonction de $|V_{h1}^{nc}|$ dans un graphe, pour chacun des deux cas test des Exercices 2 et 3. L'échelle log ne convient ici que pour $|V_{h1}^{nc}|$ (commande `semilogx(X,Y)` en Matlab). Qu'observez-vous ?

4) Visualisez les erreurs $\|\nabla_h(u - u_h)\|_K$ et les estimateurs $\eta_K(u_h)$ dans chaque triangle du maillage \mathcal{T}_h par une couleur. Ceci est déjà effectué dans le script `FreeFem` dans les fonctions `func int ErrDist()` et `func int EstDist()`. Qu'observe-t-on en les comparant ? Essayer différentes tailles de maillages.

Exercice 7. (Adaptivité de maillage)

1) Essayer de profiter des estimateurs d'erreur a posteriori $\eta_K(u_h)$ calculés dans chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Le but est de ne pas raffiner toutes les mailles du maillage $K \in \mathcal{T}_h$ comme précédemment, mais seulement celles avec une valeur de $\eta_K(u_h)$ élevée. On pourrait par exemple choisir un paramètre $0 < \theta \leq 1$ et identifier un sous-ensemble \mathcal{M}_h de tous les éléments du maillage \mathcal{T}_h tel que

$$\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \eta_K(u_h)^2 \geq \theta^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K(u_h)^2$$

et puis seulement « raffiner » les éléments dans \mathcal{M}_h par un facteur donné. Comment procéder est indiqué dans le bloc du script `FreeFem` `if (RunAdaptive)`. On pourra ensuite utiliser la commande `FreeFem`

```
Th = adaptmesh(Th, ElSizes, IsMetric=1, keepbackvertices=0, nbvx=1000000);
```

Cela plus précisément génère un nouveau maillage dont les éléments sont environ `RefFactor` plus petits que les éléments précédemment marqués.

2) Mettre au point l'adaptation du maillage décrite ci-dessus. Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ et $\eta(u_h)$ en fonction de $|V_{h1}^{nc}|$ dans un graphe, pour chacun des deux cas test des Exercices 2 et 3. Il convient toujours de se servir des échelles log. Qu'observe-t-on? Comparer le raffinement uniforme de maillage des Exercices 2 et 3 avec ce raffinement de maillage dit « adaptatif ».