Travaux dirigés N°1

La méthode des éléments finis non conforme

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, un polytope (intervalle pour $d=1$, polygone pour $d=2$, polyèdre pour $d=3$) et $\mathcal{T}_h$ un maillage de Ω composé de simplexes (intervalle pour $d=1$, triangle pour $d=2$, tétraèdre pour $d=3$).

Exercice 1. (Espace de polynômes par morceaux $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$)

1) Rappeler la définition de l'espace de polynômes par morceaux de degré $p \geq 0$, $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$.

2) Calculer la dimension de $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$ pour $p=0$ en dimension quelconque d'espace $d \geq 1$.

3) Calculer la dimension de $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$ pour $p=1$ en dimension d'espace $d=2$ et $d=3$.

4) Donner la base « Lagrangienne » ψ_h^i, telle que $\psi_h^i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ pour des points $\boldsymbol{x}_j$ dans chaque triangle/tetraèdre K du maillage $\mathcal{T}_h$, $1 \leq i \leq |\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)|$ ($|S|$ indique le cardinal de l'ensemble S et la dimension d'un espace vectoriel S), de $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$ pour $p=1$ en dimension d'espace $d=2$ et $d=3$.

Corrigé 1. ($\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$)

1) Selon le cours, c'est

$$\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in L^2(\Omega);\, v_h|_K \in \mathcal{P}_p(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{1}$$

ce qui revient à

$$\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h) = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_p(K). \tag{2}$$

2) $\mathcal{P}_0(K)$ est tout simplement l'espace des fonctions constantes sur le simplexe K, sa dimension est donc égale à 1. Du coup, d'après (2), la dimension de $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$ est égale au le nombre de simplexes dans le maillage $\mathcal{T}_h$: $|\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)| = |\mathcal{T}_h|$ avec notre notation.

3) $\mathcal{P}_1(K)$ est l'espace des fonctions affines sur le simplexe K, donc de dimension $d+1$. Caractérisation (2) donc implique $|\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)| = 3|\mathcal{T}_h|$ en dimension d'espace $d=2$ et $|\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)| = 4|\mathcal{T}_h|$ en dimension d'espace $d=3$.

4) Une base « Lagrangienne » sur un simplexe K prescrit des valeurs de polynômes dans des points $\boldsymbol{x}_j$ de sorte que

$$\psi_h^i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}.$$

Souvent, les points $\boldsymbol{x}_j$ sont choisis comme les sommets du simplexe. Pour un triangle K en dimension d'espace $d=2$ avec les sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$, ce choix est visualisé dans la Figure 1. Noter néanmoins que tout $(d+1)$-tuple de points est admissible à partir du moment que ces points ne sont pas alignés sur un hyperplan (ligne pour $d=2$, plan pour $d=3$). Nous allons profiter de ce choix ci-dessous dans l'Exercice 3.

Pour l'espace $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$ avec $p=1$ et $d=2$, il a donc ces 3 fonctions de base pour chaque triangle K.

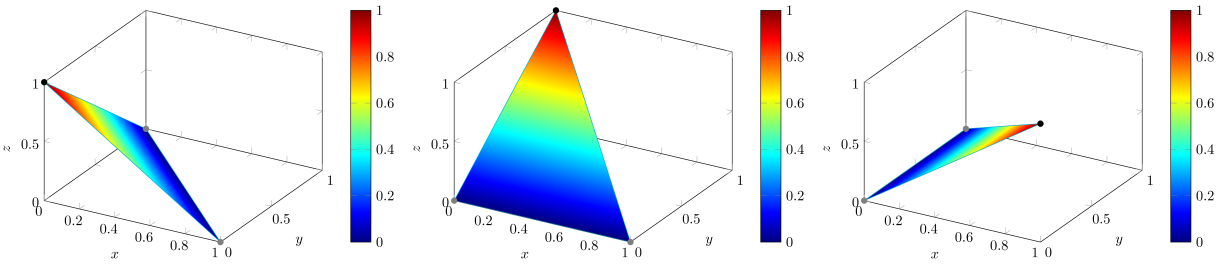

FIGURE 1 – Base Lagrangienne de l'espace $\mathcal{P}_1(K)$ (utilisée plus tard pour l'espace V_{hp})

Exercice 2. (Espace de polynômes par morceaux continus V_{hp})

L'espace habituel V_{hp} de polynômes par morceaux continus de degré $p \geq 1$ est donné par

$$V_{hp} = \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

1) Calculer la dimension de V_{hp} pour $p = 1$ en dimension d'espace $d = 2$ et $d = 3$.

2) Donner la base « Lagrangienne » ψ_h^i, $1 \leq i \leq |V_{hp}|$, de V_{hp} pour $p = 1$ en dimension d'espace $d = 2$ et $d = 3$.

Corrigé 2. (V_{hp})

1) La contrainte d'appartenir à $H_0^1(\Omega)$ dans la définition (3) implique selon le cours que les sauts des traces sur les faces de toute fonction v_h dans V_{hp} sont nuls. Pour des polynômes par morceaux, où la trace égale la valeur actuelle, ceci implique que la fonction v_h est continue. De même, toute fonction v_h dans V_{hp} est zéro au bord $\partial\Omega$.

La trace de $v_h \in V_{hp}$ sur chaque face F est une fonction affine. Pour que le saut soit nul sur toute F, il suffit qu'il soit nul dans d points qui ne sont pas alignés sur un hyperplan de F. Un bon choix sont les sommets de F, comme pour la base Lagrangienne de l'Exercice 1. Donc on peux choisir seulement les valeurs dans des sommets de maillage qui se trouvent à l'intérieur de Ω, $\mathcal{V}_h^{\text{int}}$; la dimension de V_{hp} pour $p = 1$ est donc $|\mathcal{V}_h^{\text{int}}|$.

2) Par le même raisonnement que pour la question précédente, on voit que la base Lagrangienne ψ_h^i de V_{hp} est donnée par

$$\psi_h^i(\boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} \quad \forall \boldsymbol{a}_j \in \mathcal{V}_h^{\text{int}}, \quad \psi_h^i(\boldsymbol{a}_j) = 0 \quad \forall \boldsymbol{a}_j \in \mathcal{V}_h^{\text{ext}}.$$

En mots, ψ_h^i est une fonction affine par morceaux sur le maillage $\mathcal{T}_h$ qui prend la valeur 1 dans un sommet en dehors du bord $\partial\Omega$ et la valeur 0 dans tous les autres sommets. Une illustration dans la dimension $d = 2$ est donnée dans la Figure 2.

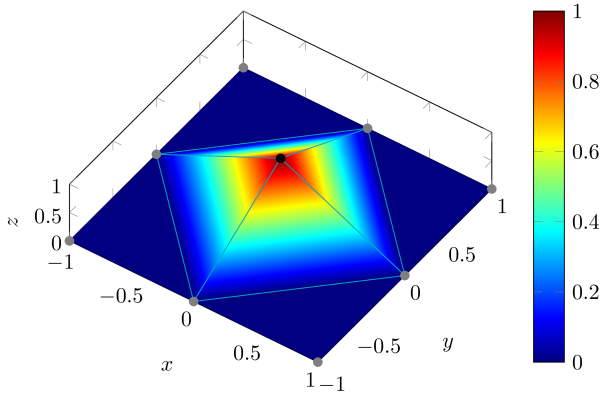

FIGURE 2 – Une fonction de base Lagrangienne de l'espace V_{h1}

Exercice 3. (Espace de polynômes faiblement continus V_{hp}^{nc})

1) Rappeler la définition de l'espace de polynômes faiblement continus de degré $p \geq 1$, V_{hp}^{nc}.

2) Calculer la dimension de V_{hp}^{nc} pour $p = 1$ en dimension d'espace $d = 2$ et $d = 3$.

3) Donner la base « Lagrangienne » ψ_h^i, $1 \leq i \leq |V_{hp}^{\mathrm{nc}}|$, de V_{hp}^{nc} pour $p = 1$ en dimension d'espace $d = 2$ et $d = 3$.

Corrigé 3. (V_{hp}^{nc})

1) Selon le cours, c'est

$$V_{hp}^{\mathrm{nc}} = \{v_h \in \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h);\ \langle [\![v_h]\!], q_h \rangle_F = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_{p-1}(F),\ \forall F \in \mathcal{F}_h\}. \tag{4}$$

2) La trace de $v_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}$ sur chaque face F est toujours une fonction affine pour $p = 1$. Pour que le saut soit de la valeur moyenne nulle sur toute la face F (on a $p - 1 = 0$ dans (4)), il suffit qu'il soit nul dans le barycentre de F. Par conséquence, on choisit seulement les valeurs dans les barycentres des faces de maillage qui se trouvent à l'intérieur de Ω pour générer tout l'espace V_{hp}^{nc} ; la dimension de V_{hp}^{nc} pour $p = 1$ est donc $|\mathcal{F}_h^{\mathrm{int}}|$.

3) Soit $\boldsymbol{x}_j$ le barycentre de la face F_j. La base Lagrangienne ψ_h^i de V_{hp}^{nc} est donné par

$$\psi_h^i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij} \quad \forall F_j \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{int}}, \quad \psi_h^i(\boldsymbol{x}_j) = 0 \quad \forall F_j \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{ext}}.$$

En mots, ψ_h^i est une fonction affine par morceaux sur le maillage $\mathcal{T}_h$ qui prend la valeur 1 dans un barycentre de face en dehors du bord $\partial\Omega$ et la valeur 0 dans tous les autres barycentres des faces. Une illustration dans la dimension $d = 2$ est donnée dans la Figure 4 ; elle repose sur le choix de la base $\mathcal{P}_1(K)$ de la Figure 3.

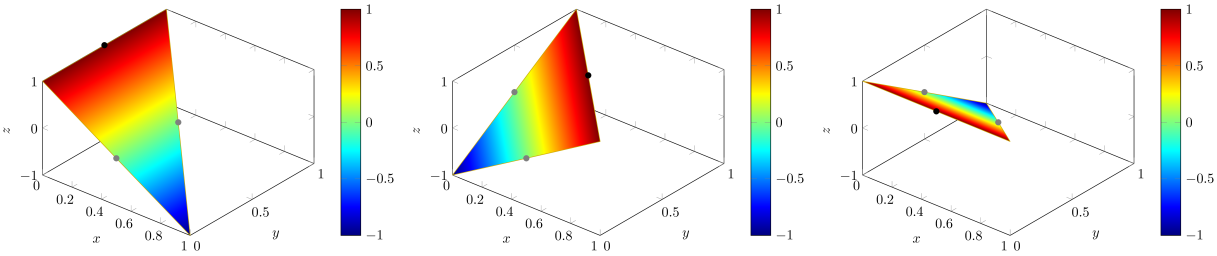

FIGURE 3 – Base Lagrangienne de l'espace $\mathcal{P}_1(K)$ (utilisée pour l'espace V_{hp}^{nc})

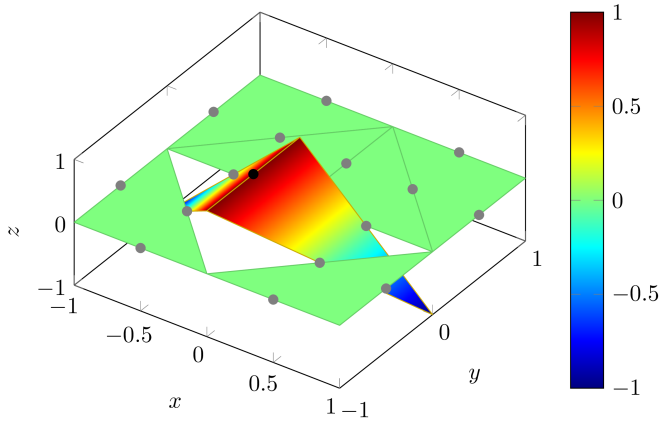

FIGURE 4 – Une fonction de base Lagrangienne de l'espace V_{h1}^{nc}

Exercice 4. (Comparaison des espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp}, $V_{hp}^{\rm nc}$; matrices de masse et de rigidité)

1) Comparer les espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp} et $V_{hp}^{\rm nc}$ pour un même degré de polynômes $p \geq 1$. Y a-t-il des inclusions ?

2) Donner (schématiquement) l'emplacement des entrées non nulles dans les matrices de masse

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{ij}^{\rm d} &:= (\psi_h^j, \psi_h^i) \qquad 1 \leq i,j \leq |\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)|, \\ \mathbb{M}_{ij} &:= (\psi_h^j, \psi_h^i) \qquad 1 \leq i,j \leq |V_{hp}|, \\ \mathbb{M}_{ij}^{\rm nc} &:= (\psi_h^j, \psi_h^i) \qquad 1 \leq i,j \leq |V_{hp}^{\rm nc}| \end{aligned}$$

et de rigidité

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{ij}^{\rm d} &:= (\nabla_h \psi_h^j, \nabla_h \psi_h^i) \qquad 1 \leq i,j \leq |\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)|, \\ \mathbb{K}_{ij} &:= (\nabla \psi_h^j, \nabla \psi_h^i) \qquad 1 \leq i,j \leq |V_{hp}|, \\ \mathbb{K}_{ij}^{\rm nc} &:= (\nabla_h \psi_h^j, \nabla_h \psi_h^i) \qquad 1 \leq i,j \leq |V_{hp}^{\rm nc}| \end{aligned}$$

pour $p = 1$ en dimension d'espace $d = 2$. Combien y a-t-il d'entrées non nulles par ligne ? Y a-t-il de blocs indépendants ?

3) Pour les matrices ci-dessus, sont-elles : symétriques, définie positives, inversibles ?

4) Les espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp} et $V_{hp}^{\rm nc}$, sont-ils des espaces normés ? Pour quelle norme – norme $L^2(\Omega)$ et/ou la norme $L^2(\Omega)$ pour le gradient faible brisé ? Sont-ils les espaces de Hilbert ? Pour quel produit scalaire ?

Corrigé 4. (Espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp}, $V_{hp}^{\rm nc}$)

1) Les espaces sont imbriqués comme

$$V_{hp} \subsetneq V_{hp}^{\rm nc} \subsetneq \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h). \tag{5}$$

2) Les entrées principalement non nulles sont placées de la même manière dans les matrices de masse et de rigidité. Soit le degré de polynôme $p = 1$ et dimension d'espace $d = 2$.

Pour $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, il faut que ψ_h^i et ψ_h^j soient non nulles sur le même triangle. Le nombre d'entrées principalement non nulles par ligne est ici égal à 3. Le bloc correspondant à chaque triangle est de taille 3×3 et il est indépendant des autres.

Pour V_{hp}, sur la ligne i associée avec un sommet $\boldsymbol{a}_i$, on peut trouver une valeur non nulle sur des colonnes j associées avec un sommet $\boldsymbol{a}_j$ tel que soit 1) $i = j$, soit 2) il y a une arête entre $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{a}_j$. Le nombre d'entrées principalement non nulles par ligne varie avec le maillage – c'est souvent entre 5 et 9. Il n'y a pas de blocs indépendants.

Pour $V_{hp}^{\rm nc}$, une valeur non nulle peut se trouver sur la ligne i (associée avec un barycentre de face $\boldsymbol{x}_i$) si la colonne j (associée avec un barycentre $\boldsymbol{x}_j$) est telle que soit 1) $i = j$, soit 2) $\boldsymbol{x}_i$ et $\boldsymbol{x}_j$ appartiennent au même triangle. Le nombre d'entrées principalement non nulles par ligne est égal à 5. Il n'y a pas de blocs indépendants.

3) Toutes ces matrices sont symétriques.

Les matrices $\mathbb{M}^\bullet = \mathbb{M}^{\rm d}$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}^{\rm nc}$ sont définie positives, car elles correspondent au produit scalaire $L^2(\Omega)$ sur les espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp} et $V_{hp}^{\rm nc}$, qui sont tous des sous-espaces de $L^2(\Omega)$. En fait, soit

$$v_h = \sum_i \mathrm{X_i} \psi_h^i.$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 \le \|v_h\|^2 = (v_h, v_h) &= \Big(\sum_j \mathrm{X_j} \psi_h^j, \sum_i \mathrm{X_i} \psi_h^i \Big) \\ &= \sum_j \mathrm{X_j} \sum_i \mathrm{X_i} (\psi_h^j, \psi_h^i) = \sum_j \mathrm{X_j} \sum_i \mathrm{X_i} \mathbb{M}^\bullet_{ij} = \mathrm{X}^{\mathrm{t}} \mathbb{M}^\bullet \mathrm{X}, \end{aligned} \tag{6}$$

et l'égalité avec 0 n'apparaît que pour $v_h = 0$, ce qui correspond à $\mathrm{X} = \mathbf{0}$.

Il faut être plus prudent avec les matrices de rigidité. Premièrement, en sommant les trois lignes de chaque bloc pour $\mathbb{K}^{\mathrm{d}}$ pour un triangle donné, on trouve une ligne de zéros $0 = (\nabla_h 1_K, \nabla_h 1_K) : \mathbb{K}^{\mathrm{d}}$ est singulière.

L'espace $H^1_0(\Omega)$ est Hilbert pour le produit scalaire $(\nabla v, \nabla w)$. Comme $V_{hp} \subset H^1_0(\Omega)$, alors $\mathbb{K}$, la matrice correspondante au produit scalaire $(\nabla v_h, \nabla w_h)$, est définie positive. Pour voir ceci avec une preuve directe, à l'aide de l'inégalité de Poincaré–Friedrichs, on voit, comme dans (6),

$$\begin{aligned} 0 \le \|v_h\|^2 \le \underbrace{C_{\mathrm{PF}}^2}_{\le 1} h_\Omega^2 \|\nabla v_h\|^2 \le h_\Omega^2 (\nabla v_h, \nabla v_h) &= h_\Omega^2 \Big(\sum_j \mathrm{X_j} \nabla \psi_h^j, \sum_i \mathrm{X_i} \nabla \psi_h^i \Big) \\ = h_\Omega^2 \sum_j \mathrm{X_j} \sum_i \mathrm{X_i} (\nabla \psi_h^j, \nabla \psi_h^i) = h_\Omega^2 \sum_j \mathrm{X_j} \sum_i \mathrm{X_i} \mathbb{K}_{ij} &= h_\Omega^2 \mathrm{X}^{\mathrm{t}} \mathbb{K} \mathrm{X}. \end{aligned} \tag{7}$$

Enfin, nous avons vu dans le cours que l'espace V_{hp}^{nc} est Hilbert pour le produit scalaire $(\nabla_h v_h, \nabla_h w_h)$. Par conséquence, $\mathbb{K}^{\mathrm{nc}}$, la matrice correspondante à ce produit scalaire, est définie positive. Pour voir ceci avec une preuve directe, on procède comme dans (7) avec l'inégalité de Poincaré–Friedrichs brisée.

4) Ce sont essentiellement les réponses du point précédent : tous les espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp} et V_{hp}^{nc} sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire (v_h, w_h). Donc aussi normés. Attention, ceci vient essentiellement de la dimension finie : par exemple $H^1_0(\Omega)$ (tout comme $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$) n'est pas un espace de Hilbert pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire (v, w). Seulement V_{hp} et V_{hp}^{nc} sont des espaces de Hilbert (donc normés) pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$ du gradient faible brisé, $(\nabla_h v_h, \nabla_h w_h)$, mais pas $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$.

Exercice 5. (Les espaces $H^1(\mathcal{T}_h)$, $H^1_0(\Omega)$ et $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$, inclusions et approximation)

1) Rappeler la définition des espaces $H^1(\mathcal{T}_h)$, $H^1_0(\Omega)$ et $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$. Y a-t-il des inclusions ?

2) Sont $H^1(\mathcal{T}_h)$, $H^1_0(\Omega)$ et $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$ des espaces de Hilbert ? Pour quel produit scalaire ?

3) Donner les inclusions entre $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp}, V_{hp}^{nc} et $H^1(\mathcal{T}_h)$, $H^1_0(\Omega)$, $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$.

4) Essayer de donner, à titre d'illustration et sans preuve, l'ordre maximal d'approximation par des fonctions dans des espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp}, V_{hp}^{nc} dans $H^1(\mathcal{T}_h)$, $H^1_0(\Omega)$, $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$, en norme $L^2(\Omega)$ et en norme $L^2(\Omega)$ pour le gradient faible brisé.

Corrigé 5. (Espaces $H^1(\mathcal{T}_h)$, $H^1_0(\Omega)$ et $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$)

1) Selon le cours, c'est

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega);\ \nabla v \in [L^2(\Omega)]^d\}, \\ H^1_0(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ H^1(\mathcal{T}_h) &= \{v \in L^2(\Omega);\ v|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^1(K), \\ H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h) &= \{v \in H^1(\mathcal{T}_h);\ \langle [\![v]\!], q_h \rangle_F = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_0(F),\ \forall F \in \mathcal{F}_h\}. \end{aligned}$$

Ces espaces sont inclus comme

$$H^1_0(\Omega) \subsetneq H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h) \subsetneq H^1(\mathcal{T}_h). \tag{8}$$

2) Ces trois espaces sont les espaces de Hilbert pour le produit scalaire, pour $v, w \in H^1(\mathcal{T}_h)$,

$$(v,w)_{H^1(\mathcal{T}_h)} = (v,w) + (\nabla_h v, \nabla_h w) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \big\{(v,w)_K + (\nabla(v|_K), \nabla(w|_K))_K\big\}.$$

En plus, Théorème 1.4.6 du polycopié du cours montre que $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\nabla_h v, \nabla_h w) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla(v|_K), \nabla(w|_K))_K \qquad v, w \in H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h), \tag{9}$$

tout comme $H^1_0(\Omega)$.

3) Ces espaces sont inclus comme

$$V_{hp} \subsetneq H^1_0(\Omega), \quad V_{hp}^{\mathrm{nc}} \subsetneq H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h), \quad \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h) \subsetneq H^1(\mathcal{T}_h). \tag{10}$$

4) L'ordre maximal d'approximation dans les trois espaces $\mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$, V_{hp} et V_{hp}^{nc} est $p+1$ en norme $L^2(\Omega)$ et p en norme $L^2(\Omega)$ pour le gradient faible brisé, comme les trois espaces se basent sur les polynômes de degré p par maille.

Exercice 6. (Solution faible faiblement continue)

Considérer le problème de Poisson avec les conditions de Dirichlet homogènes : pour $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{11a}$$
$$u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{11b}$$

1) Définir une solution faible "faiblement continue" u^{nc} dans l'espace $H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$. Y a-t-il existence et unicité ?

Corrigé 6. (Solution faible faiblement continue)

1) C'est $u^{\mathrm{nc}} \in H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$ telle que

$$(\nabla_h u^{\mathrm{nc}}, \nabla_h v) = (f, v) \qquad \forall v \in H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h).$$

$H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (9). Par l'inégalité de Poincaré–Friedrichs brisée,

$$|(f,v)| \le \|f\|\|v\| \le C_{\mathrm{bPF}} h_\Omega \|f\|\|\nabla_h v\| \qquad \forall v \in H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h),$$

donc $v \to (f,v)$ est une forme linéaire continue. Il existe ensuite une et une seule $u^{\mathrm{nc}} \in H^1_{[\![]\!]}(\mathcal{T}_h)$ par le théorème de représentation de Riesz.

Exercice 7. (Projections orthogonales)

1) Considérer le problème (11), la solution faible classique $u \in H^1_0(\Omega)$ (à rappeler), la solution faible faiblement continue $u^{\mathrm{nc}} \in H^1_{[\![}(\mathcal{T}_h)$ de l'Exercice 6, l'approximation u_h par les éléments finis conformes dans l'espace V_{hp} et enfin l'approximation u_h^{nc} par les éléments finis non conformes dans l'espace V_{hp}^{nc}.

2) Donner les projections orthogonales pour le produit scalaire $(\nabla_h \cdot, \nabla_h \cdot)$ (où, rappelons, ∇_h est le gradient faible brisé) entre u, u^{nc}, u_h et u_h^{nc}.

Corrigé 7. (Projections orthogonales)

1) Ce sont $u \in H^1_0(\Omega)$, $u^{\mathrm{nc}} \in H^1_{[\![}(\mathcal{T}_h)$, $u_h \in V_{hp}$ et $u_h^{\mathrm{nc}} \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}$ telles que

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega), \tag{12a}$$
$$(\nabla_h u^{\mathrm{nc}}, \nabla_h v) = (f, v) \qquad \forall v \in H^1_{[\![}(\mathcal{T}_h), \tag{12b}$$
$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \qquad \forall v_h \in V_{hp}, \tag{12c}$$
$$(\nabla_h u_h^{\mathrm{nc}}, \nabla_h v_h) = (f, v_h) \qquad \forall v_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}. \tag{12d}$$

2) D'après (12) avec (5), (8) et (10), c'est

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - u_h)\| &= \min_{v_h \in V_{hp}} \|\nabla(u - v_h)\|,\\
\|\nabla_h(u_h^{\mathrm{nc}} - u_h)\| &= \min_{v_h \in V_{hp}} \|\nabla_h(u_h^{\mathrm{nc}} - v_h)\|,\\
\|\nabla_h(u^{\mathrm{nc}} - u_h)\| &= \min_{v_h \in V_{hp}} \|\nabla_h(u^{\mathrm{nc}} - v_h)\|,\\
\|\nabla_h(u^{\mathrm{nc}} - u)\| &= \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \|\nabla_h(u^{\mathrm{nc}} - v)\|,\\
\|\nabla_h(u^{\mathrm{nc}} - u_h^{\mathrm{nc}})\| &= \min_{v_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}} \|\nabla_h(u^{\mathrm{nc}} - v_h)\|.
\end{aligned}$$