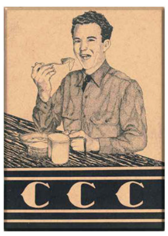
Sémantique dénotationnelle

1 Rappel du TD précédent

- Une chaîne est une partie totalement ordonnée.
- Un ω-cpo est un ensemble partiellement ordonné dont toutes les chaînes admettent une borne supérieure.
- Les ω-cpos ont tous un élément minimal qu'on note $\perp$.
- Une fonction continue est une fonction f qui commute avec les sups :
  pour toute chaîne X, $f(\sup\ X) = \sup\ f(X)$.
  On note $[D_1 \to D_2]$ l'ensemble des fonctions continues entre deux ω-cpos.
- Les fonctions continues sont croissantes.
- Toutes les fonctions continues admettent un plus petit point fixe.
- Étant donné deux ω-cpos D_1 et D_2, $D_1 \times D_2$ muni de l'ordre produit et $[D_1 \to D_2]$ muni de l'ordre «point-à-point» sont des ω-cpos.

Échauffement :

1. La définition vue en TD est-elle équivalente à celle vue en cours ?
2. Prouvez que $f \in [A \times B \to C]$ est continue si et seulement si pour toute chaîne $X_1 \subseteq A$, $X_2 \subseteq B$ on ait :
$$f(\sup X_1, \sup X_2) = \sup f(X_1 \times X_2).$$
3. Soit A un ω-cpo et Y la fonction qui a une fonction continue de $[A \to A]$ associe son plus petit point fixe. Prouvez que $Y \in [[A \to A] \to A]$.
4. Soit A, B, C trois ω-cpos. Construisez deux fonctions $\mathbf{Ev}_{A,B} \in [[A \to B] \times A \to B]$ et $\Lambda_{A,B,C} \in [[A \times B \to C] \to [A \to [B \to C]]$ qui correspondent à l'évaluation d'une fonction et à la curryfication. Il faut montrer qu'elles sont continues !
   Vos fonctions devront être suffisamment naturelles pour satisfaire les axiomes suivants.
$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{A,B,C}(f) \circ g &=& \Lambda_{A',B,C}(f \circ < g \circ \pi_1, \pi_2 >) \\ \mathbf{Ev}_{B,C} \circ < \Lambda_{A,B,C}(f) \circ \pi_1, \pi_2 > &=& f \\ \Lambda_{[A \to B],A,B}(\mathbf{Ev}_{A,B}) &=& \mathrm{id}_{[A \to B]} \end{array}$$
   où $f : A \times B \to C$ et $g : A' \to A$ et où pour toutes fonctions $h_1 : X \to Y_1$, $h_2 : X \to Y_2$ on définit $< h_1, h_2 >: X \to Y_1 \times Y_2$ par $x \mapsto (h_1(x), h_2(x))$.
   On vérifiera au passage que, dans chaque égalité, le membre droit et le membre gauche appartiennent au même ensemble de fonctions continues.



Les CCC même au petit déjeuner !

2 Sémantique dénotationnelle de IMP

1. Donnez un ω-cpo sur lequel les programmes de **Imp** peuvent être interprétés.
2. Construisez l'interprétation de **skip**, de la séquence (;), de l'affectation, de la conditionnelle.
3. Donnez le code du *swap* de variable, construire son interprétation.
4. Donnez l'interprétation du **while**.

5. Construisez l'interprétation de **while** `true` **do skip**.
6. Construisez l'interprétation de la fonction factorielle (programmée dans **IMP**).

3 Sémantique dénotationnelle de PCF

On étudie l'extension suivante du λ-calcul :

$$t, s \quad := \quad \lambda x.t \quad | \quad (s\, t) \quad | \quad x \quad | \quad \pi_1 \quad | \quad \pi_2 \quad | \quad (s, t) \quad | \quad \mathbf{fix} \quad | \quad \mathbf{succ} \quad | \quad \mathbf{pred} \quad | \quad \underline{n} \quad | \quad \mathbf{if}$$

Ainsi que la clôture par contexte des règles de réduction habituelles :

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda x.t)\; s & >_\beta & t[s/x] \\
\pi_1\;(s,t) & >_\beta & s \\
\pi_2\;(s,t) & >_\beta & t \\
\mathbf{fix}\, f & >_\beta & f\;(\mathbf{fix}\, f) \\
\mathbf{if}\;\underline{0}\; s\; t & >_\beta & s \\
\mathbf{if}\;\underline{n+1}\; s\; t & >_\beta & t \\
\mathbf{pred}\;\underline{0} & >_\beta & \underline{0} \\
\mathbf{pred}\;\underline{n+1} & >_B & \underline{n} \\
\mathbf{succ}\;\underline{n} & >_\beta & \underline{n+1}
\end{array}$$

Question 1. *Concevez un système de type pour ce langage de programmation basé sur les types décrits ci-dessous.*

$$\sigma, \tau \quad := \quad \mathtt{nat} \quad | \quad \sigma \to \tau \quad | \quad \sigma \times \tau$$

Dans la suite on admettra tous les lemmes de λ-calcul (substitutions, préservation du typage par réduction).

Question 2. *Programmez la fonction d'addition de deux entiers.*

Question 3. *Proposez une interprétation* $[\![\cdot]\!]$ *des types.*

Question 4. *Supposons que* $x_1 : \tau_1, ..., x_n : \tau_n \vdash t : \tau$*. Proposez une interprétation*

$$[\![x_1 : \tau_1, ..., x_n : \tau_n \vdash t : \tau]\!] \in [\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \to \tau].$$

Question 5. *Calculez l'interprétation de l'addition.*

Question 6. *Prouvez que si* $t >_\beta t'$*, alors* $[\![\Gamma \vdash t' : \tau]\!] = [\![\Gamma \vdash t : \tau]\!]$*.*

On en déduite que si $\Gamma \vdash t : \mathtt{nat}$. Alors

$$t\beta^*\underline{n} \Rightarrow [\![\Gamma \vdash t : \mathtt{nat}]\!] = n$$

On peut également montrer la réciproque mais c'est plus compliqué (c'est compliqué comme une preuve de normalisation).

En déduire le résultat de confluence suivant (on pourrait bien sûr le démontrer directement dans la syntaxe) :

Question 7. *Supposons* $\Gamma \vdash t : \mathtt{nat}$ *et que* $t\beta^*\underline{n}$ *et* $t\beta^*\underline{m}$ *alors* $n = m$*.*