Encore du calcul des séquents !

1 Élimination des coupures

La figure 1 rappelle les règles du calcul des séquents classique, en mode propositionnel multiplicatif :

$$\frac{}{A \vdash A}(Ax) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, A \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}(Cut)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}(C_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}(C_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}(W_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}(W_d)$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}(X_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}(X_d)$$

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash \Delta}(\wedge_g^i) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A_1, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A_2, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta_1, \Delta_2}(\wedge_d)$$

$$\frac{\Gamma_1, A_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2, A_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A_1 \vee A_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}(\vee_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_i, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2, \Delta}(\vee_d^i)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \Rightarrow B \vdash \Delta_1, \Delta_2}(\Rightarrow_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}(\Rightarrow_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}(\neg_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}(\neg_d)$$

Fig. 1 – Calcul des séquents classiques multiplicatifs.

Question 1. – *Comment «réécrire » une preuve de la forme suivante ?*

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1}{\Gamma_1 \vdash \neg A, \Delta_1}(\neg_d) \qquad \dfrac{\Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_2, \neg A \vdash \Delta_2}(\neg_g)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}(Cut)$$

– *Généraliser : comment réécrire toute preuve se terminant par une coupure dont les deux prémisses se terminent respectivement par les règles logiques d'introduction à droite et à gauche du constructeur de tête de la formule coupée ?*

– On définit le *degré* d'une formule comme suit :

$$\begin{aligned}
&d(A) = 1 \qquad \text{si } A \text{ atomique}\\
&d(A \wedge B) = d(A \vee B) = d(A \Rightarrow B) = max\{d(A), d(B)\} + 1\\
&d(\neg A) = 1 + d(A)
\end{aligned}$$

– Le degré $d(\pi)$ d'une preuve π est la borne sup des degrés des formules qui y sont coupées.
– La *hauteur* d'une preuve est la profondeur de l'arbre qui lui correspond.

– On note $\Gamma - C$ la liste de formule obtenue à partir de Γ en en retirant un nombre arbitraire de fois la formule C.

Question 2.

– *Montrer que pour toute formule C de degré d, et toutes preuves de $\Gamma \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash \Delta'$, de degrés inférieurs ou égaux à d, il existe une preuve de $\Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta - C, \Delta'$ de degré inférieur ou égal à d. (On raisonnera par récurrence sur la somme des hauteurs des deux arbres donnés, et on ne traitera que le cas où l'on retire de Γ' et Δ toutes les occurrences de C).*
– *Montrer que de toute preuve de degré $d > 0$ d'un séquent donné, on peut obtenir une preuve du même séquent, de degré strictement inférieur à d.*
– *En déduire l'élimination des coupures.*

2 Divers

Question 3. *Rappeler les règles concernant les quantificateurs du premier ordre dans le calcul des séquents.*

Question 4.

– *Montrer que $\vdash_{LJ} \exists x, P$ implique qu'il existe un terme t tel que $\vdash_{LJ} P[t/x]$.*
– *Ça vous rappelle un théorème du cours ?*
– *Est-ce que c'est vrai pour LK ?*
– *Et s'il y a quelque chose à gauche du $\vdash$?*

Question 5. *Une règle est dite réversible si la prouvabilité de la conclusion implique celle de toutes ses prémisses. Quelles sont les règles réversibles du calcul des séquents ? Prouvez-le !*

Question 6. *Montrez que la propriété de la sous-formule entraîne la décidabilité de LJ et LK propositionnels.*

Question 7. *Montrer l'équivalence de LJ et NJ.*

Question 8. *Montrer l'équivalence de LK et NK.*

3 Logique du second ordre

Question 9. *Donner le langage de la logique minimale du second ordre. Et les règles en déduction naturelle ?*

Question 10. *Proposer un encodage du vrai, du faux, de la conjonction, de la disjonction et du quantificateur existentiel (du second ordre !).*

Question 11. *Donner les λ-termes correspondants.*

4 Révisions

Question 12. *Prouver en Hilbert $((p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r) \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow s$. Le prouver dans NJ. Donner un λ-terme habitant de ce type. Donner le terme de la logique combinatoire qui correspond à ce terme.*

Question 13. *Donner une formule prouvée par ces termes :*

$$\lambda xyz.x\ (y\ (\lambda t.t\ z)\ z \qquad\qquad \lambda y.(\lambda x.y\ (x\ x))\ (\lambda z.y\ (x\ x))$$

Question 14. *Prouver ces formules dans LK et montrer qu'elles ne sont pas des théorèmes de LJ :*

$$(P \Rightarrow (Q \vee R \vee S)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow S)) \qquad\qquad \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))$$