Systèmes Hilbertiens

Les mathématiques sont un jeu que l'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles ou des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.
Jean-David Hilbert.

1 Logique minimale

Soit $\mathcal{L}_0$ le langage de formules décrit par la grammaire suivante

$$P, Q \quad := \quad X \quad | \quad P \to Q$$

où X varie dans un ensemble $\mathcal{V}$ infini dénombrable de *variables*. On laissera les formules pencher naturellement à droite, ainsi on notera $(P \to Q) \to (Q \to R) \to P \to R$ à la place de $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$. On définit ensuite la famille, paramétrée par un ensemble Γ de formules, de systèmes de déduction suivants :

$$P \in \Gamma \, \frac{}{\vdash_\Gamma P} \, \textsc{Axiome} \qquad\qquad \frac{\vdash_\Gamma P \to Q \qquad \vdash_\Gamma P}{\vdash_\Gamma Q} \, \textsc{Modus-ponens}$$

On note Γ_0 le plus petit ensemble tel que pour toutes formules P, Q et R

(K) : $P \to Q \to P \in \Gamma_0$,

(S) : $(P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R \in \Gamma_0$.

Question 1. *Prouver dans* $\vdash_{\Gamma_0}$ *les formules* $P \to P$ *et* $P \to Q \to Q$.

Question 2. *Prouver que pour tout ensemble* Γ *de formules tel que* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\vdash_\Gamma P \to Q$ *si et seulement si* $\vdash_{\Gamma,P} Q$.

On dit alors que la règle suivante est *admissible*

$$\frac{\vdash_{\Gamma,P} Q}{\vdash_\Gamma P \to Q} \, \to\text{-}\textsc{Introduction}$$

c'est-à-dire que s'il existe une preuve qui utilise cette règle alors il existe une preuve de la même formule qui ne l'utilise pas.

Question 3. *Déduisez-en que* $(P \to Q) \to (Q \to R) \to P \to R$ *est prouvable.*

D.Hilbert

2 Logique intuitionniste

On enrichit le langage $\mathcal{L}_0$ avec de nouveaux symboles en un langage $\mathcal{L}$ défini par la grammaire

$$P, Q \quad := \quad X \quad | \quad P \to Q \quad | \quad P \wedge Q \quad | \quad P \vee Q \quad | \quad \top \quad | \quad \bot.$$

On notera $\neg P$ la formule $P \to \bot$ et $P \leftrightarrow Q$ la formule $P \to Q \wedge Q \to P$.

Question 4. *Sauriez vous trouver les schémas d'axiomes à rajouter pour pouvoir utiliser ces symboles (trois pour la conjonction, trois pour la disjonction, un pour $\top$ et un pour $\bot$) ?*

On appellera Γ_1 le plus petit ensemble contenant Γ_0 et satisfaisant ces schémas d'axiomes.

Question 5. *Les formules suivantes sont-elles prouvables dans $\vdash_{\Gamma_1}$?*

$$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P \quad P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q) \quad \neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \quad \neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$P \rightarrow \neg\neg P \quad \neg\neg\neg P \rightarrow \neg P \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Une question très naturelle serait de se demander si ces nouveaux symboles pourraient nous aider à prouver plus de formules. En fait, on peut montrer que notre logique intuitionniste est *une extension conservative* de la logique minimale : pour toute formule P dans $\mathcal{L}_0$, on a $\vdash_{\Gamma_0} P$ si et seulement si $\vdash_{\Gamma_1} P$.

3 Logique classique

Dans une prochaine séance, on montrera que le tiers exclu $P \vee \neg P$ n'est pas prouvable dans $\vdash_{\Gamma_1}$. Maintenant, on obtient la logique classique en rajoutant le tiers exclu à Γ_1 : soit Γ_2 le plus petit ensemble contenant Γ_1 tel que pour toute formule P, on a $P \vee \neg P \in \Gamma_2$.

Question 6. *Montrer que les formules ci-dessous sont prouvables dans $\vdash_{\Gamma_2}$.*

$$\neg\neg P \rightarrow P \quad \neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q \quad ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P \quad P \rightarrow Q \vee Q \rightarrow P$$

Un modèle $\mathcal{M}$ sera ici pour nous une fonction $\mathcal{V} \longrightarrow \{0,1\}$. On notera $[\![X]\!]_{\mathcal{M}}$ l'image $\mathcal{M}(X)$ d'une variable X par un modèle $\mathcal{M}$.

Question 7. *Généraliser cette notation à toutes les formules.*

On dira qu'une formule P est *valide* dans un modèle $\mathcal{M}$ si $[\![P]\!]_{\mathcal{M}} = 1$. On notera $\mathcal{M} \models P$ si P est valide dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \models \Gamma$ si $\mathcal{M} \models P$ pour tout $P \in \Gamma$.

Question 8. *Montrer que $\mathcal{M} \models \Gamma_2$ (et donc $\mathcal{M} \models \Gamma_1$ et $\mathcal{M} \models \Gamma_0$).*

Question 9. *Prouver que $\mathcal{M} \models P \leftrightarrow Q$ est équivalent à $\mathcal{M} \models P$ si et seulement si $\mathcal{M} \models Q$.*

Question 10. *Prouver que ces modèles sont corrects vis-à-vis des systèmes de déductions. Vous devez prouver que pour tout Γ et tout modèle tel que $\mathcal{M} \models \Gamma$, si $\vdash_\Gamma P$, alors $\mathcal{M} \models P$.*

Question 11. *En déduire que $\vdash_{\Gamma_2}$ puis que $\vdash_{\Gamma_1}$ sont cohérents (vous devez prouver qu'il existe une formule que ces systèmes ne prouvent pas).*

Question 12. *Pour toute formule P, construisez une formule P' ne contenant pas de variable et telle que $\vdash_{\Gamma_2} P'$ si et seulement si $\mathcal{M} \models P$ pour tout modèle $\mathcal{M}$.*

Question 13. *En déduire :*

- *Que ces modèles sont complets pour $\vdash_{\Gamma_2}$. Vous devez prouver que pour toute formule P, si P est satisfaite dans tout modèle (qui satisfait Γ_2), alors P est prouvable dans $\vdash_{\Gamma_2}$.*
- *Une procédure de décision qui décide de la prouvabilité dans $\vdash_{\Gamma_2}$ (question subsidiaire : dans quelle classe de complexité célèbre se range ce problème de décision ?).*