

Exemple questions d'examen du cours  
*High performance computing for numerical methods and  
data analysis*

13 Avril 2018

Uniquement les documents papiers sont autorisés

**Question A** : Produit matrice vecteur

On considère l'algorithme de multiplication d'une matrice avec un vecteur  $y = y + A \cdot x$ , où  $A$  est une matrice de taille  $n \times n$ ,  $x$  et  $y$  sont des vecteurs de  $n$  éléments. On considère que la matrice  $A$  est déjà distribuée sur  $P$  processeurs en utilisant une distribution unidimensionnelle au long des colonnes. Ceci signifie que chaque processeur a dans sa mémoire un bloc de colonnes de  $A$ . Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont déjà distribués sur les processeurs aussi. Avec cette distribution, par exemple le processeur 0 stocke dans sa mémoire les premières  $n/P$  colonnes de  $A$  et les premiers  $n/P$  éléments de  $x$  et  $y$  (on suppose que  $n/P$  est un entier).

1. Ecrivez l'algorithme pour calculer  $y = y + A \cdot x$  en pseudo-code et MPI en utilisant cette distribution unidimensionnelle.
2. Calculez le temps parallèle de cet algorithme. Le temps nécessaire à envoyer un message de  $q$  mots est estimé comme:

$$\text{Temps message} = \alpha + q \cdot \beta, \quad (1)$$

où  $\alpha$  est la latence du réseau et  $\beta$  est l'inverse de la bande passante du réseau.

**Question B** : Algorithmes et bornes sur les communications

1. Donnez un exemple d'opération en algèbre linéaire effectuée sur une matrice de dimension  $n \times n$  et un algorithme qui ne permet pas de minimiser les communications.
2. Pour la même opération, donnez un algorithme qui permet de minimiser les communications et expliquez pourquoi.

**Question C** : Calcul d'une approximation de rang faible

Considérons une matrice  $A$  de dimension  $m \times n$ ,  $m \gg n$ . On souhaite calculer une approximation de rang  $k$ ,  $A_k$ , de la matrice  $A$ , où  $m \gg n \gg k$ .

1. Quelle est la meilleure approximation  $A_k$  et quelle est l'erreur  $\|A - A_k\|_2$  dans ce cas ?
2. Proposez un algorithme qui utilise une factorisation QR avec pivotage qui permet de calculer une approximation  $\tilde{A}_k$  de rang  $k$  et qui permet de réduire les communications. Donnez et expliquez l'erreur  $\|A - \tilde{A}_k\|_2$  obtenu par votre algorithme ?