Méthodes numériques pour les EDP.
Projet 2: bases réduites et inégalités variationnelles.

Ce projet consiste à implémenter une méthode de base réduite pour une inégalité variationnelle. On considère le problème **paramétré** :

Définition 1 *Étant donné $\mu \in \mathcal{P}$, trouver $(u(\mu), \lambda(\mu)) \in V \times M$ tel que*

$$\begin{aligned} a(u(\mu), v; \mu) + b(v, \lambda(\mu)) &= f(v; \mu), & v \in V \\ b(u(\mu), \eta - \lambda(\mu)) &\leq g(\eta - \lambda(\mu); \mu), & \eta \in M, \end{aligned}$$

où :
- $\mathcal{P}$ est un ensemble de paramètres,
- $u, v \in V$, V un espace de Hilbert,
- $\lambda \in M$, $M \subset W$ un cône d'un espace de Hilert W,
- a est une forme bilinéaire continue coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha(\mu)$ et $\gamma(\mu)$ telles que :

$$|a(u, v; \mu)| \leq \gamma(\mu) \|u\|.\|v\|,$$

$$\alpha(\mu)\|u\|^2 \leq |a(u, u; \mu)|,$$

- b est une forme bilinéaire continuer vérifiant une condition "de stabilité inf-sup", i.e. $\beta > 0$:

$$\inf_{\eta \in W} \sup_{v \in V} b(v, \eta)/(\|v\|_V \, \|\eta\|_W) \geq \beta$$

- f, g sont des formes linéaires continues sur V et W respectivement : $\|f(\cdot; \mu)\|_V \leq \gamma_f(\mu)$ et $\|g(\cdot; \mu)\|_W \leq \gamma_g(\mu)$.

1 Discrétisation par base réduite

Pour résoudre efficacement ce problème, on souhaite construire une méthode de base réduite. Pour ce faire, on considère $S = \{\mu_1, \ldots, \mu_N\} \subset \mathcal{P}$, un ensemble de jeu de paramètres et les espaces réduits suivants :
- $W_N := \mathrm{span}\{\lambda(\mu_i)\}_{i=1}^N \subset W$,
- $M_N := \mathrm{span}_+\{\lambda(\mu_i)\}_{i=1}^N := \left\{\sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda(\mu_i) | \alpha_i \geq 0\right\} \subset M$,
- $V_N := \mathrm{span}\{u(\mu_i)\}_{i=1}^N \subset V$.

On introduit alors le problème réduit :

Définition 2 *Étant donné $\mu \in \mathcal{P}$, trouver $(u_N(\mu), \lambda_N(\mu)) \in V_N \times M_N$ tel que*

$$\begin{aligned} a(u_N(\mu), v_N; \mu) + b(v_N, \lambda_N(\mu)) &= f(v_N; \mu), & v_N \in V_N \\ b(u_N(\mu), \eta_N - \lambda_N(\mu)) &\leq g(\eta_N - \lambda_N(\mu); \mu), & \eta_N \in M_N. \end{aligned}$$

2 Travail théorique

On souhaite obtenir une estimation a posteriori. On introduit pour cela les résidus :

$$\begin{aligned} r(v;\mu) &:= f(v;\mu) - a(u_N(\mu), v;\mu) - b(v, \lambda_N(\mu)), \quad v \in V. \\ s(\eta;\mu) &:= b(u_N(\mu), \eta) - g(\eta;\mu), \quad \eta \in W. \end{aligned}$$

Notons que le résidu s n'est pas censé s'annuler, mais seulement etre négatif. On introduit également leur représentants de Riesz $v_r(\mu) \in V, \eta_s(\mu) \in W$, définis par

$$\begin{aligned} \langle v, v_r(\mu)\rangle_V &= r(v;\mu), \quad v \in V, \\ \langle \eta, \eta_s(\mu)\rangle_W &= s(\eta;\mu), \quad \eta \in W. \end{aligned}$$

Prouver les inégalités suivantes :

1. Pour tout $v \in V$ et $\mu \in \mathcal{P}$

$$r(v;\mu) = a(u(\mu) - u_N(\mu), v;\mu) + b(v, \lambda(\mu) - \lambda_N(\mu)).$$

2. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}$

$$\|\lambda(\mu) - \lambda_N(\mu)\|_W \le \frac{1}{\beta}\left(\|r(\cdot;\mu)\|_V + \gamma_a(\mu)\,\|u(\mu) - u_N(\mu)\|_V\right).$$

3. On pose

$$\begin{aligned} \delta_r(\mu) &:= \|r(\cdot;\mu)\|_{V'} = \|v_r(\mu)\|_V \\ \delta_{s1}(\mu) &:= \|\pi(\eta_s(\mu))\|_W \\ \delta_{s2}(\mu) &:= \langle \lambda_N(\mu), \pi(\eta_s(\mu))\rangle_W . \end{aligned}$$

Expliquer chacune des étapes du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \alpha\,\|u - u_N\|_V^2 &\le a(u - u_N, u - u_N) = r(u - u_N) - b(u - u_N, \lambda - \lambda_N) \\ &\le \delta_r\,\|u - u_N\|_V + b(u, \lambda_N - \lambda) + b(u_N, \lambda - \lambda_N) \\ &\le \delta_r\,\|u - u_N\|_V + g(\lambda_N - \lambda) + s(\lambda - \lambda_N) + g(\lambda - \lambda_N) \\ &= \delta_r\,\|u - u_N\|_V + \langle \lambda, \pi(\eta_s)\rangle_W + \langle \lambda, \eta_s - \pi(\eta_s)\rangle_W \\ &\le \delta_r\,\|u - u_N\|_V + \langle \lambda - \lambda_N, \pi(\eta_s)\rangle_W + \delta_{s2} \\ &\le \delta_r\,\|u - u_N\|_V + \|\lambda - \lambda_N\|_W \delta_{s1} + \delta_{s2}, \end{aligned}$$

où π la partie positive : une composante de $\pi(v)$ est soit 0 si la composante de v est négative, soit la composante elle-même si elle est positive.

4. En déduire :

$$\begin{aligned} \|u(\mu) - u_N(\mu)\|_V &\le \Delta_u(\mu) := c_1(\mu) + \sqrt{c_1(\mu)^2 + c_2(\mu)}, \\ \|\lambda(\mu) - \lambda_N(\mu)\|_W &\le \Delta_\lambda(\mu) := \frac{1}{\beta}\left(\delta_r(\mu) + \gamma_a(\mu)\Delta_u(\mu)\right), \end{aligned}$$

avec les constantes :

$$c_1(\mu) := \frac{1}{2\alpha(\mu)}\left(\delta_r(\mu) + \frac{\delta_{s1}(\mu)\gamma_a(\mu)}{\beta}\right), \quad c_2(\mu) := \frac{1}{\alpha(\mu)}\left(\frac{\delta_{s1}(\mu)\delta_r(\mu)}{\beta} + \delta_{s2}(\mu)\right).$$

5. Montrer que les estimateurs a posteriori trouvés s'annulent si $(u_N(\mu), \lambda_N(\mu)) = (u(\mu), \lambda(\mu))$.

3 Travail pratique

On considère les données suivantes, correspondant à un fil élastique suspendu entre les deux points $(0,0)$ et $(1,0)$. Le domaine $\Omega = (0,1)$ est discrétisé à l'aide d'un maillage uniforme de pas $\Delta x := 1/K$ for $K \in \mathbb{N}$. L'espace V est celui correspondant à une discrétisation en élément fini P^1 :

$$V := \{v \in H_0^1(\Omega) | v_{|[x_k,x_{k+1}]} \in P_1, k = 0, \ldots, K-1\}$$

de dimension $H_V = H_W = H := K - 1 = 201$ avec $x_k := k\Delta x$. On choisit la base standard $\psi_i \in V$ de noeuds $x_i \in \Omega$, i.e., $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, H$. Le cône est défini par $M := \text{span}_+\{\chi_i\}_{i=1}^H$, où la famille $(\chi_i)_{i=1}^H$ est choisie telle que $\underline{B} = (b(\psi_i, \chi_j))_{i,j=1}^{H,H}$ correspondant à $b(\cdot,\cdot)$ soit l'opposée de la matrice identité.
Les formes bilinéaires a et b sont données par :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &:= \int_\Omega \nu(\mu)(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \;, \quad u, v \in V \\ b(u, \eta) &:= -\eta(u), \quad u \in V, \eta \in W \end{aligned}$$

avec $\nu(\mu)(x) = \mu_1 Ind_{[0,1/2]}(x) + \nu_0 Ind_{[1/2,1]}(x)$, $\nu_0 = 0.15$, qui caractérise l'élasticité du fil. La fonction obstacle est

$$h(x; \mu) = -0.2 \left(\sin(\pi x) - \sin(3\pi x)\right) - 0.5 + \mu_2(x - 0.5).$$

On fixe $\mathcal{P} := [0.05, 0.25] \times [-0.05, 0.5] \subset \mathbb{R}^2$. Les formes linéaires f et g sont données par :

$$f(v; \mu) = f(v) := -\int_\Omega v(x) dx, \quad v \in V.$$

$$g(\eta; \mu) = \sum_{i=1}^H \underline{\eta}_i h(x_i; \mu) \quad \text{for} \quad \eta = \sum_{i=1}^H \underline{\eta}_i \chi_i \in W$$

1. Faire un code pour le problème élément fini (de dimension H).
2. Expliquer pourquoi après discrétisation, le système se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{A}_N(\mu)\overline{u}_N(\mu) + \overline{B}_N \overline{\lambda}_N(\mu) &= \overline{f}_N(\mu) \\ \overline{\lambda}_N(\mu) &\geq 0 \\ \overline{g}_N(\mu) - \overline{B}_N^T \overline{u}_N(\mu) &\geq 0 \\ \overline{\lambda}_N(\mu)^T (\overline{g}_N(\mu) - \overline{B}_N^T \overline{u}_N(\mu)) &= 0. \end{aligned}$$

   On donnera la définition des matrices et vecteurs impliqués dans cette formule.
3. À l'aide de la fonction octave 'qp', faire un code qui résoud ce problème.
4. Coder deux générateurs de bases réduites [1] pour ce problème : l'un basé sur la véritable erreur, le dernier avec les estimateurs a posteriori (on pourra prendre la somme de $\Delta_u(\mu)$ et $\Delta_\lambda(\mu)$).
5. Tester les deux bases : on prendra comme critère l'erreur maximum observée sur un ensemble random dans $\mathcal{P}$.

1. Le terme de "base" est abusif pour ce qui concerne l'espace M_N, car c'est un cône...