Université Paris-Dauphine M2 Analyse et Probabilités.
Département MIDO

T.P. remise à niveau 1 : bases de Matlab, équations différentielles, un exemple d'équation elliptique

Le but de ce T.P. est de se (re-)familiariser avec Matlab, et de traiter quelques exemples d'équations.

Exercice 1 : commandes de base

On commence par quelques opérations simples sur les matrices.

1. Quelles sont les matrices que l'on peut construire avec les commandes *ones, diag, rand, randn, zeros, eye, linspace, meshgrid*? Comment fonctionne les commandes :
   — *sparse*?
   — *kron*?
   — *reshape*?
2. Comment construire rapidement[1] les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & \cdots & & \\ & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & 0 & 15 & 15 \\ & & & \cdots & \cdots & 0 & 15 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi & \pi & \pi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & \pi & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & \pi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10^6 & 10^5 & 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10^3 & 10^2 & 10^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : un exemple d'équation elliptique

On souhaite résoudre par une méthode de Monte-Carlo l'équation

$$\Delta u = 0$$

sur un domaine rectangulaire $\Omega = [0,2] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$. On se donne des conditions au bord de Dirichlet :

$$u(0,y) = 0, \ y \in [0,1],$$

$$u(1,y) = 1, \ y \in [0,1],$$

$$u(x,0) = x, \ x \in [0,2],$$

$$u(x,2) = x, \ x \in [0,2].$$

1. C'est-à-dire au mieux en une ligne, au moins sans boucle for.

1. Après avoir construit une discrétisation du domaine Ω, écrire une fonction qui permet de lancer une marche aléatoire sur dans le domaine.
2. Calculer par une méthode de Monte-Carlo la solution en un point arbitraire.
3. Comparer avec la valeur obtenue par la résolution complète du système linéaire associé au problème.
4. Vérifier que la convergence de la méthode de Monte-Carlo est en $C/\sqrt{N}$, où N est le nombre de tirages.

Exercice 3 : méthodes numériques pour les équations différentielles

1. Tester sur l'exemple simple $y' = -y,\ y(0) = 2, t \in [0, 5]$, les méthodes suivantes :
   — Euler explicite
   — Euler implicite
   — Crank-Nichloson
   $$y_{n+1} = y_n + hy'_{n+\frac{1}{2}}$$
   avec
   $$\begin{aligned} y'_{n+\frac{1}{2}} &= f\left(t + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2} f\left(t + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$
   — Runge-Kutta d'ordre 4, donnée par l'équation :
   $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$
   où
   $$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right). \end{aligned}$$
   qui correspond donc au tableau de Butcher
   $$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

On tracera les courbes d'erreurs pour ces méthodes, et on évalura numériquement leur ordre de convergence.

2. Un exemple étonnant... Reprendre l'étude précédente sur l'équation :

$$y' = -\lambda y + 1 + \lambda t,\ y(0) = 2, t \in [0, 5]$$

dont la solution est donnée par $y(t) = t + 2e^{-\lambda t}$. On comparera en particulier les résultats obtenus pour $h = 0.01$ et $h = 0.001$.