Université Paris-Dauphine
Département MIDO

M2, Analyse & Probabilités.

T.P.2 : Algorithmes monotones

1 Problème

Le but de ce T.P. est d'implémenter un schéma monotone. On reprend l'exemple du TP précédent :

On considère un système $y(t) \in \mathbb{C}^2$ dont l'évolution est décrite par l'équation :

$$\dot{y}(t) = i\,(A + c(t)B)\,y(t),$$

où A et B sont deux matrices réelles symétriques, et c une fonction scalaire réelle. On se donne les valeurs numériques suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $T = 10$, $\alpha = 1$, $N = 10^3$.

On suppose que le système par d'un état y_0, de norme $\|y_0\| = 1$ au temps $t = 0$ et on cherche un contrôle c qui permet d'approcher une cible y_{ref} au temps T. On a donc recours à une fonctionnelle du type :

$$J(c) = \frac{1}{2}\|y(T) - y_{cible}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^T c(t)^2 dt,$$

qui dans notre cas se simplifie en :

$$J(c) = -Re\langle y(T), y_{cible}\rangle + \frac{\alpha}{2}\int_0^T c(t)^2 dt + 1.$$

Le '+1' ne modifiant pas le problème, on l'omet par la suite.

2 Algorithmes monotones

2.1 Principes

On rappelle qu'étant donné deux contrôles c et c', y et y les états associés, et p l'adjoint associé à c, on a :

$$\langle y'(T) - y(T), y_{cible} \rangle = -\int_0^T i(c'(t) - c(t))\langle By'(t), p(t)\rangle dt.$$

On utilise les conventions $\langle \lambda u, v\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle$ et $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$.

2.2 Discrétisation

On se donne une discrétisation en temps $(t_n)_{n=0,\cdots,N}$, $t_n = n\Delta t$, $T = N\Delta t$. Pour l'équation d'évolution, on utilise la discrétisation suivante (dite du "splitting d'opérateur") :

$$y_{n+1} = \exp(iA\Delta t)\exp(ic_n B\Delta t)y_n.$$

$$\langle y'_N - y_N, y_{cible}\rangle = -\sum_{n=0}^{N-1}\langle(\exp(i(c'_n - c_n)Bdt) - Id)y'_n, p_n\rangle. \tag{1}$$

3 Travail à faire

1. En choisissant deux contrôles arbitraires (random), vérifier numériquement la formule du cours (1).
2. À partir de cette formule, implémenter une méthode d'optimisation. On pourra soit faire la méthode du cours, basée sur la formule :

   $$J(c') - J(c) = -\frac{\alpha}{2\lambda}\int_0^T (c'(t) - c(t))^2 dt,$$

   soit faire plus simplement un pas de la méthode de Newton sur les fonctions de la somme, pour chaque pas de temps, soit faire les deux !
3. Comparer les résultats avec ceux obtenus par la méthode du gradient.