

---

Rattrapage - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2011/2012

*On justifiera CHAQUE réponse.*

---

**Exercice 1. .**

On considère l'équation de Burgers :

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Proposer une solution pour les trois données initiales suivantes :

1. Si  $x < 0$ ,  $u_0(x) = 0$  et si  $x \geq 0$ ,  $u_0(x) = 1$ .
2. Si  $x < 1$ ,  $u_0(x) = 1$  et si  $x \geq 1$ ,  $u_0(x) = 0$ .
3. Si  $x < 0$ ,  $u_0(x) = 0$ , si  $1 > x \geq 0$ ,  $u_0(x) = 1$ , si  $x \geq 1$ ,  $u_0(x) = 0$ .

**Exercice 2. .**

On considère le problème elliptique :

$$\Delta u = f,$$

où  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  et  $u$  est une fonction de  $[0, 1]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On complète ce problème par un des conditions de Dirichlet homogènes.

1. Écrire une formulation faible du problème en prenant comme espace de fonctions les fonction  $\mathcal{C}^1(0, 1)$ .
2. On souhaite résoudre ce problème par une méthode d'éléments finis. On choisit comme élément  $\mathbb{P}^1$ . Sur quel système linéaire débouche cette méthode? On définira un maillage uniforme de l'intervalle  $[0, 1]$ . On écrira précisément les matrices et vecteurs intervenant dans la méthode.
3. Quelles auraient été les matrices et vecteur dans le cas de conditions de Neumann homogène? Dans le cas de conditions périodiques?
4. Qu'aurait donné une méthode par différences finies?

**Exercice 3. .**

On considère l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u - \partial_{x,x}^2 u = 0,$$

complétée par les conditions aux bords :

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u(0, x) = u_0(x),$$

où  $u_0$  est une condition initiale donnée. On souhaite le résoudre par le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

où on a utilisé les notations classiques pour les discrétisations en temps et en espace :  $J\Delta x = 1$ ,  $N\Delta t = T$  avec  $T > 0$ .

1. Montrer que ce schéma est explicite et inconditionnellement stable pour la norme  $\ell^\infty$ .
2. Analyser la consistance du schéma. Sous quelle condition liant  $\Delta t$  et  $\Delta x$  ce schéma est-il convergent lorsque ces deux paramètres tendent vers 0?
3. Ce schéma est-il plus intéressant que le schéma explicite classique?