Université Paris-Dauphine Année 2006-2007
UFR MIDO-M1

Examen de septembre- Traitement numérique du signal - 2007

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.(Conception de Filtre par approximation de Padé)
On souhaite concevoir un filtre de réponse impulsionnelle $h_d(n), n \geqslant 0$. On choisi a priori un filtre dont la fonction de tranfert est de la forme :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}.$$

La fonction $H(z)$ a donc $L = M + N + 1$ paramètres, les coefficients $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$, à déterminer. Supposons que l'on mette en entré de notre filtre une impulsion de Dirac $x(n) = \delta(n)$ (c'est-à-dire, un "1" suivi de zéros).

1. Montrer que la réponse est alors de la forme :

$$\begin{aligned} h(n) &= -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \ldots - a_N h(n-N) \\ &\quad + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \ldots + b_M \delta(n-M). \end{aligned} \tag{1}$$

2. Montrer que (1) peut également s'écrire :

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \ldots - a_N h(n-N) + b_n, \ 0 \leqslant n \leqslant M. \tag{2}$$

3. Montrer que pour $n > M$, l'équation (2) peut encore se simplifer en :

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \ldots - a_N h(n-N), \ n > M. \tag{3}$$

4. Expliquer comment les équations (2) et (3) peuvent être utilisées pour déterminer $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$ si l'on impose $h(n) = h_d(n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant N + M$.

Exercice 2.
Dterminer et représenter les réponses en amplitude et en phase des filtres suivants

1. $y(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) + x(n-1)\big)$.
2. $y(n) = \frac{1}{4}\big(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)\big)$.
3. $y(n) = \frac{1}{4}\big(x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)\big)$.

Exercice 3.
On souhaite compresser par un code de Huffman un texte composé de sept symboles dont les fréquences sont présentées dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0,49 & 0,26 & 0,12 & 0,04 & 0,04 & 0,03 & 0,02 \end{pmatrix}$$

On considère un codage direct des symboles du texte. Construire l'arbre de Huffman correspondant aux fréquences indiquées dans le tableau. Calculer le taux de compression que l'on peut esperer.

Exercice 4.

On considère le code correcteur défini par $\phi(a1a2a3) = c1c2c3c4c5c6$ avec :

$$c1 = a1, c2 = a2, c3 = a3, c4 = a1 + a2, c5 = a2 + a3, c6 = a1 + a3.$$

1. Calculer la distance minimale entre deux symboles du code.
2. On considère le cas où une seule erreur survient. Montrer que ce code corrige cette erreur dans un cas sur 6.
3. Jutifiez que ce code est un code globalement meilleur qu'un code de correction qui répéte une fois chaque séquence de 3 symboles.