Université Paris-Dauphine
UFR MIDO-M2 EDP-MAD Année 2015-2016

Examen - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2015/2016

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. Élements finis
Soit $\Omega = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. On considère un maillage structuré, i.e. dont les noeuds sont les points $(x_i, y_j) = (i.h, j.h)$ avec $h = 1/L$, $L \in \mathbb{N}$ et $L > 0$. On considère l'ensemble de polynômes $\mathcal{P} = Vec\left((x,y) \mapsto 1, (x,y) \mapsto x, (x,y) \mapsto y, (x,y) \mapsto xy\right)$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est unisolvant, i.e. sur une maille de sommets (A_1, A_2, A_3, A_4), il existe un unique élément de $\mathcal{P}$ prenant des valeurs fixées en (A_1, A_2, A_3, A_4).
2. Décrire une base de la méthode d'éléments finis asociée à $\mathcal{P}$. On donnera par exemple une formule explicite de la restriction des éléments de la base sur la cellule $[0,h]^2 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
3. On considère le problème de Poisson avec des conditions de Dirichlet homogène :

$$-\Delta u = f.$$

   On applique la méthode des éléments finis décrite ci-dessus.
   (a) Combien de coefficients non-nuls y aura-t-il dans une ligne de la matrice à inverser ?
   (b) Comparer avec une méthode utilisant un maillage composé de triangles, avec des polynômes de degré 1.

Exercice 2. Un problème elliptique
Soit Ω un domaine régulier. On considère le problème suivant, avec des conditions au bord de Robin :

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \qquad (P)$$

où $\partial\Omega$ désigne le bord de Ω. On rappelle la formule de Green :

$$\int_\Omega v\Delta u + \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

1. Donner une formulation variationnelle pour (P).
2. Montrer que le problème est bien posé sur $H^1(\Omega)$.

On fixe maintenant $\Omega = [0,1]$. On considère un maillage régulier associé aux noeuds $x_i = ih$, avec $h = 1/L$, et comme espace d'approximation les fonctions affines par morceaux.

1. Décrire précisément la base associée à cette méthode.
2. Décrire le système linéaire à résoudre (on donnera tous les coefficients des matrices et vecteurs de ce système).

Exercice 3. Contrôle optimal
On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Trouver $c \in L^2(0,T)$ *minimisant*

$$J(c) = \frac{1}{2}\int_0^T c^2(t)dt,$$

sous les trois contraintes

$$\begin{array}{rcl} y'(t) + \alpha y(t) & = & c(t) \\ y(t=0) & = & y_0 \\ y(t=T) & = & y_1. \end{array} \qquad (C)$$

Les données du problème sont donc : $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$.

1. Écrire le Lagrangien du système $\mathcal{L}(y, c, p)$ et donner le système d'optimalité correspondant.
2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $c(t)$, α et y_0.
3. De la même manière, donner une expression de l'adjoint p(t) (=le multiplicateur de Lagrange) pour tout temps t en fonction de $p(0)$
4. Résoudre le sytème explicitement.
5. Quel est le sytème d'optimalité si à la place de J, on considère G définie par :

   $$G(c) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{dc(t)}{dt} \right)^2 dt,$$

   avec les mêmes contraintes (C), plus $c(0) = c(T) = 0$.**On ne demande pas de résoudre ce système !**

Exercice 4.
On considère l'algorithme glouton (greedy algorithm) du cours, avec

$$\Delta(Y, \mu) := \|u(\mu) - P_Y u(\mu)\|.$$

Montrer que la suite

$$\varepsilon_n := \max_{\mu \in \mathcal{P}} \Delta(X_n, \mu),$$

est décroissante. On a noté par $\mathcal{P}$ l'ensemble des paramètres.