Université Paris-Dauphine Année 2014-2015
UFR MIDO-M1

Examen final - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.
Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit E un espace de Hilbert, tel que pour tout $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n - x\| \to 0$. Que peut-on conclure sur E ?
<u>Corrrection :</u> Si E était de dimension infinie, une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *contredirait la propriété, puisque la limite faible d'une telle suite est zéro. On en déduit que E est de dimension finie.*
2. Soient E et F des Banach et A un fermé de E. Si $f : A \to F$ est compacte et si X est un fermé borné dans A alors $(Id - f)(X)$ est fermé.
<u>Correction :</u> Si $y_n = x_n - f(x_n)$ *est une suite de* $(Id - f)(X)$ *qui converge vers un* y*, alors comme* $(x_n) \in X$ *est bornée, on peut extraire de* $(f(x_n))$ *une suite qui converge ; cela montre que* $x_n = y_n - f(x_n)$ *converge elle-même vers un* $x \in X$ *(*X *est fermée) et, par continuité, que* $y = x - f(x) \in (Id - f)(X)$*.*

3. Soit $f_n : [0;1] \to C$ une fonction continue. On suppose que la famille $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ est équicontinue. Soit (x_n) une suite de $[0;1]$ telle que $x_n \to a$ et on suppose que $f_n(a) \to b$. Montrer que $f_n(x_n) \to b$.
<u>Corrrection :</u> On commence par décomposer la différence $f_n(x_n) - b$*.*
$$f_n(x_n) - b = f_n(x_n) - f_n(a) + f_n(a) - b.$$
Soit $\varepsilon > 0$ *et* η *le pas d'équicontinuité de la famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *associé. Puisque* $x_n \to a$*, il existe* N_1 *tel que, pour tout* $n > N_1$, $|x_n - a| \leqslant \eta$*. On a donc, par équicontinuité,* $f_n(x_n) - f_n(a) \leqslant \varepsilon$*. Puisque* $f_n(a) \to b$*, il existe* N_2 *tel que, pour tout* $n > N_2$, $|f_n(a) - b| \leqslant \varepsilon$*. En choisissant* $N_3 = \max(N_1, N_2)$*, on obtient*
$$\forall n \geqslant N_3,\ |f_n(x_n) - b| \leqslant 2\varepsilon.$$

Exercice 2.
Soit $K \in C^0([0,1]^2)$, c'est-à-dire une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C^0([0,1])$, on pose $Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$.

1. Soit $M > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$.
   (a) Montrer que la famille $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
   <u>Corrrection :</u> on écrit $Tf_n(x') - Tf_n(x) = \int_0^1 (K(x',y) - K(x,y))fn(y)dy$*. Puisque* K *est continue sur le compact* $[0,1]^2$*, elle y est en fait équicontinue d'après le théorème de Heine. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe donc un* $\eta > 0$ *tel que si* $|x' - x| \leqslant \eta$*, alors* $|K(x',y) - K(x,y)| \leqslant \varepsilon$*. On remarque que* η *est indépendant de la fonction* f_n *considérée. On a donc* $|x' - x| \leqslant \eta \Rightarrow |Tf_n(x') - Tf_n(x)| \leqslant \varepsilon M$*, ce qui prouve équicontinuité.*

(b) Montrer que la famille $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.
<u>Corrrection :</u> *On vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli. L'ensemble* $[0,1]$ *est fermé. La famille* $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *constitue une partie équicontinue d'après la question précédente, bornée car* $|Tf_n(x')| \leqslant M\|K\|_\infty$ *pour tout* n. *Sa fermeture vérifie donc les hypothèses du théorème d'Ascoli. On en déduit le résultat.*

2. Soit le sous espace $E_\lambda = \{f \in C^0([0,1]), f = \lambda Tf\}$. Montrer que la boule unité de E_λ est compacte dans $C^0([0,1])$. Que peut-on en déduire ?
<u>Corrrection :</u> *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la boule unité de* E_λ *dans* $C^0([0,1])$. *D'après la question précédente,* $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une sous-suite* $(Tf_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergente dans* $C^0([0,1])$. *Puisque* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\lambda Tf_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *on en déduit que* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge également. D'où la compacité de* E_λ. *On en déduit que le sous-espace* E_λ *est donc de dimension finie.*

3. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$, n éléments de E_λ. On suppose qu'ils forment une famille libre orthonormée pour le produit scalaire $L^2(0,1) : (u,v) \mapsto \int_0^1 u(t)v(t)dt$.

(a) Soit $x \in [0,1]$ et $k_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $k_x(y) = K(x,y)$. Calculer la norme de $L^2(0,1)$ en fonction de K.
<u>Corrrection :</u> *on a* $\|k_x\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 K(x,y)^2 dy$.

(b) On note φ_x la projection orthogonale de k_x sur $Vect(e_1, \cdots, e_n)$. Pour fixer les notations, on note $\varphi_x(y) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_x^\ell e_\ell(y)$. Donner une expression du coefficient α_x^ℓ en fonction de K et e_ℓ.
<u>Corrrection :</u> *puisque* φ_x *est la projection de* k_x *sur la base* $(e_1, \cdots, e_n)$, *on a* $\langle k_x, e_\ell\rangle = \langle \varphi_x, e_\ell\rangle$ $\int_0^1 k_x(y)e_\ell(y)dy = \int_0^1 \varphi_x(y)e_\ell(y)dy$. *Or* $\int_0^1 k_x(y)e_\ell(y)dy = \int_0^1 K(x,y)e_\ell(y)dy$ *et* $\int_0^1 \varphi_x(y)e_\ell(y)dy = \alpha_x^\ell$. *On en déduit* $\alpha_x^\ell = \int_0^1 K(x,y)e_\ell(y)dy$.

(c) Montrer que $e_\ell(x) = \lambda\alpha_x^\ell$
<u>Corrrection :</u> *d'après la question précédente, on a* $\lambda\alpha_x^\ell = \lambda\int_0^1 K(x,y)e_\ell(y)dy$. *Mais* $\lambda\int_0^1 K(x,y)e_\ell(y)dy = \lambda Te_\ell(x)$ *et puisque* $e_\ell \in E_\lambda$, *c'est-à-dire* $e_\ell = \lambda Te_\ell$, *on en déduit l'égalité demandée.*

(d) Expliquer pourquoi $\|k_x\|^2_{L^2(0,1)} \geqslant |\varphi_x\|^2_{L^2(0,1)}$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{\ell=1}^n e_\ell(x)^2 \leqslant \lambda^2 \int_0^1 K^2(x,y)dy.$$

<u>Corrrection :</u> *l'inégalité* $\|k_x\|^2_{L^2(0,1)} \geqslant |\varphi_x\|^2_{L^2(0,1)}$ *vient du fait que la norme d'un projeté est toujours inférieure à la norme de l'antécédent (penser à* $\|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2 = \|x\|^2$*). D'après les questions précédentes, on obtient alors :*

$$\sum_{\ell=1}^n (\alpha_x^\ell)^2 = \|\varphi_x\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \|k_x\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 K(x,y)^2 dy.$$

On multiplie tout ceci par λ^2 *et on utilise* $e_\ell(x) = \lambda\alpha_x^\ell$ *pour obtenir l'inégalité recherchée.*

(e) En déduire une majoration de la dimension de E_λ qui ne dépende que de λ et de la norme K dans $L^2([0,1]^2)$.
<u>Corrrection :</u> *on peut choisir* $n = dim(E_\lambda)$. *On obtient alors, en utilisant le fait que les vecteurs* e_λ *sont normés et en intégrant l'inégalité précédente par rapport à* x *:*

$$dim(E_\lambda) \leqslant \lambda^2\|K\|^2_{L^2([0,1]^2)}.$$

Exercice 3.
On considère le problème de minimisation associé à la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt + \int_0^1 \cos(u(t))dt.$$

1. Montrer que J est bornée inférieurement sur $H_0^1(0,1)$. On note $m = \inf_{u \in H_0^1(0,1)} J(u)$.
   <u>Corrrection :</u> *on montre facilement que* $J(u) \geqslant -1$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $\lim_n J(u_n) \to m$. Montrer que la suite (des dérivées) $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0,1)$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
   <u>Corrrection :</u> *puisque le terme* $\int_0^1 \cos(u(t))dt$ *est borné, si* $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *n'était pas bornée,* $J(u_n)$ *ne le serait pas non plus, ce qui contredit le caractère minimisant de la suite.*
   Puisque la suite $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2(0,1)$, *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinue : on a en effet* $|u_n(x) - u_n(y)| \leqslant \|u_n'\|_{L^2}\sqrt{|x-y|}$.
3. Montrer que l'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une fonction h une pour la norme uniforme.
   <u>Corrrection :</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée en norme infinie, puisque* $|u_n(x)| \leqslant \|u_n'\|_{L^2}$. *On est donc dans le cadre d'application du théorème d'Ascoli, et la suite contient une sous-suite convergente (pour la norme infinie).*
4. Montrer que l'on peut extraire de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des dérivées $(u'_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une fonction k dans $L^2(0,1)$.
   <u>Corrrection :</u> *la suite* $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2(0,1)$, *on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente dans l'espace de Hilbert* $L^2(0,1)$.
5. Montrer que h est dans $H_0^1(0,1)$ et que k est sa dérivée faible. (Indication : on pourra, pour $t \in [0,1]$, considérer la suite $(\langle u'_{\varphi(\psi(n))}, 1_{[0,t]}\rangle_{L^2(0,1)})_{\in\mathbb{N}}$, où $1_{[0,t]}$ est la fonction indicatrice de $[0,t]$)
   <u>Corrrection :</u> *on a* $\langle u'_{\varphi(\psi(n))}, 1_{[0,t]}\rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^t u'_{\varphi(\psi(n))}(s)ds = u_{\varphi(\psi(n))}(s)$. *On peut passer à la limite des deux côtés d'après les deux questions précédentes : on utilise la convergence faible à gauche et uniforme à droite. On obtient* $h(t) = \int_0^t k(s)ds$, *ce qui montre que* k *est la dérivée faible de* h. *Puisque* $k \in L^2(0,1)$, h *est dans* $H_0^1(0,1)$.
6. Montrer que h minimise J sur $H_0^1(0,1)$.
   <u>Corrrection :</u> *le premier terme de la fonctionnelle* $\frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt$ *est s.c.i, convexe. On a donc*
   $$liminf(\frac{1}{2}\int_0^1 (u'_{\varphi(\psi(n))}(t))^2 dt \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (h'(t))^2 dt.$$
   Par convergence uniforme, l'autre terme vérifie
   $$liminf\int_0^1 \cos(u_{\varphi(\psi(n))}(t))dt = \int_0^1 \cos(h(t))dt.$$
   Comme on considère une suite extraite d'une suite minimisante, cette sous-suite est aussi minimisante. Donc $liminf J(u_{\varphi(\psi(n))}) = \min J(u)$. *On obtient finalement* $\min J(u) \leqslant J(h)$, *ce qui montre que* h *minimise* J.
7. Soit v une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $v(0) = v(1) = 0$. Montrer que
   $$\int_0^1 h'(t)v'(t) - \sin(h(t))v(t)dt = 0.$$

Corrrection : cette équation correspond à $\frac{dJ(h+\varepsilon v)}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0}$. *Il faut justifier qu'on peut effectuer les dérivations. Cela vient du fait que les différentes fonctions rencontrées sont Gâteaux-différentiables (voir les justifications du cours).*

8. On suppose que h est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que h vérifie :

$$h'' + \sin(h) = 0,\ h(0) = h(1) = 0.$$

Corrrection : on peut intégrer $\int_0^1 h'(t)v'(t) - \sin(h(t))v(t)dt = 0$ *par parties. On obtient* $-\int_0^1 (h''(t) + \sin(h(t)))v(t)dt = 0$ *pour tout* $v \in \mathcal{C}^1(0,1)$ *qui est dense dans* $L^2(0,1)$. *On en déduit l'égalité.*