Université Paris-Dauphine
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Année 2011-2012

Examen - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2011/2012

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. .

1.

Exercice 2. .

1.

Exercice 3. .

1.

Exercice 4. Un problème d'obstacle.
On considère un fil elastique au repos suspendu entre les deux points $(0,0)$ et $(1,0)$. Pour $x \in [0,1]$, On note $u(x)$ l'ordonnée du fil correspondant à l'abscisse x. Sous le fil se trouve un obstacle paramétré par une courbe $(x, h(x))$, avec encore $x \in [0,1]$. Dans un modèle simple d'élasticité linéaire, l'ordonnée $u(x)$ vérifie

$$\nu \Delta u - \lambda = f$$

où :
- ν est un réel positif caractérisant la raideur linéïque du fil,
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est l'opérateur Laplacien,
- $\lambda > 0$ est la force de réaction du support, engendrée par la contact avec l'obstacle, aux points où ce contact à lieu, bien sûr,
- $f = -\rho g$ est la force linéïque de gravité, ρ étant la masse linéïque et g la constante de pesanteur terrestre.

En choisissant comme inconnues le couple (u, λ), le système à résoudre est donc finalement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nu \Delta u - \lambda & = & f, \\ \lambda & \geqslant & 0, \\ u & \geqslant & h, \\ (u-h) \times \lambda & = & 0. \end{array} \right. \qquad (\star)$$

1. Expliquer pourquoi cette dernière équation traduit le fait que la force de réaction du support n'est active (c'est-à-dire non nulle) qu'aux points où le contact entre le fil et l'obstacle à lieu.

   Après discrétisation en espace et en gardant les mêmes notations u, λ, f, h pour les grandeurs discrétisées (ces symboles représentent donc maintenant des vecteurs), le système $(\star)$ devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Au-\lambda & = & f, \\ \lambda_i & \geqslant & 0, \\ u_i & \geqslant & h_i, \\ (u_i-h_i)\times\lambda_i & = & 0. \end{array}\right. \qquad (\star\star)$$

où $u_i = u(x_i)$, $\lambda_i = \lambda(x_i)$, $h_i = h(x_i)$, A est la matrice associée au laplacien. On note N le nombre de noeud considérés lors de la discrétisation, c'est-à-dire $1 \leqslant i \leqslant N$.

2. On souhaite appliquer une méthode de Newton pour résoudre le système $(\star\star)$. Il faut donc le transformer en système d'égalités. On introduit pour ce faire la fonction $\varphi(u,\lambda) = \lambda - \max(0, \lambda - c(u-h))$, où c est un réel arbitraire positif. On note $\varphi_i(u,\lambda)$ sa $i-$ème composante. Montrer que le système $(\star\star)$ est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Au-\lambda & = & f, \\ \varphi(u,\lambda) & = & 0. \end{array}\right. \qquad (\star\star\star)$$

3. Rappeler la formule itérative permettant de résoudre une équation $F(X) = 0$ par la méthode de Newton. On notera DF la différentielle de F et $\delta X^k := X^{k+1} - X^k$.
4. Montrer que l'application de la méthode de Newton au système $(\star\star\star)$ conduit à la formule itérative :

$$\begin{pmatrix} A & Id \\ \partial_u\varphi(u^k,\lambda^k) & \partial_\lambda\varphi(u^k,\lambda^k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta u^k \\ \delta\lambda^k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Au^k - \lambda^k - f \\ \varphi(u^k,\lambda^k) \end{pmatrix}. \qquad (\star\star\star\star)$$

5. On suppose connaître (u^k,λ^k). Montrer que la première ligne-bloc de ce système se simplifie en une formule non-itérative (i.e. ne dépend pas de l'étape précédente) que l'on expicitera.
6. On suppose connaître (u^k,λ^k). On partitionne les indices suivant les deux ensembles $\mathcal{I} := \{i,\ 1 \leqslant i \leqslant N \quad / \quad \lambda_i - c(u_i-h_i) < 0\}$ et $\mathcal{A} := \{i,\ 1 \leqslant i \leqslant N \quad / \quad \lambda_i - c(u_i-h_i) \geqslant 0\}$. Montrer que la deuxième ligne-bloc de ce système permet de calculer explicitement les composantes de u sur $\mathcal{A}$ (que l'on note $u_{\mathcal{A}}$) et celles de λ sur $\mathcal{I}$ (que l'on note $\lambda_{\mathcal{I}}$).
7. Montrer finalement que l'application de la méthode de Newton à $(\star\star\star\star)$ peut être réduit à l'inversion d'un système linéaire de taille N (et non $2N$) que l'on explicitera.