



(english version below)

## Quantifier la diffusion numérique dans les modèles de circulation océanique

### 1 Cadre du doctorat

Ce sujet de thèse s'inscrit dans la cadre d'une collaboration entre mathématicien·nes et océanographes autour de la question de la diffusion numérique dans les codes utilisés en dynamique océanographique globale dans le cadre du projet ANR NASSMOM. La personne recrutée rejoindra le laboratoire Jacques Louis Lions de Sorbonne Université et l'équipe projet ANGE du centre INRIA Paris.

Nous recherchons un ou une candidate formée aux EDP hyperboliques et si possible à l'analyse numérique des schémas volumes finis. Il est important que la personne recrutée souhaite s'investir dans un groupe de recherche bidisciplinaire et ait un goût pour les expérimentations numériques.

### 2 Description du sujet scientifique

Les modèles numériques de circulation océanique globale (OGCM) sont utilisés à l'échelle spatiale de la planète entière et sur des échelles temporelles de l'ordre du siècle dans les travaux de science du climat. Le modèle européen NEMO est par exemple un des codes utilisés dans les simulations CMIP (Coupled Model Intercomparison Project) qui nourrissent les rapports IPCC reports (Inter- governmental Panel on Climate Change, GIEC en français). Dans ce cadre le coût de calcul contraint fortement la taille de la discrétisation spatiale : les points de grille sont typiquement distants de 100 km les uns des autres. Cela est peu ou prou la taille de nombreuses structures physique comme les courants de bord ouest et les tourbillons de méso-échelle. Ces codes utilisent des schémas d'ordre élevé, des splittings et des paramétrisations sous-maille pour être aussi précis que possible sur maillage grossier. La diffusion numérique à de telles échelles est inévitablement importante comme on pourra pour s'en convaincre en consultant la comparaison vidéo de la galerie NEMO. Un des effets de la diffusion numérique est de lisser les forts gradients. Dans les simulations de l'océan on observe alors que des masses d'eau de température et de salinité différentes se mélangent plus que ce qu'elles ne le devraient. C'est le phénomène de "mélange parasite" identifié comme un des problèmes clé pour les développements futurs des OGCMs [2].

Le cadre mathématique des inégalités d'entropie discrètes fournit une bonne compréhension de la diffusion numérique en quantifiant au niveau discret la perte d'entropie (ou d'énergie) liée au choix de discrétisation numérique. Il ne s'applique qu'à un petit nombre de schémas, principalement monolithiques et d'ordre 1. Il est donc illusoire de l'appliquer à un code réaliste, d'autant

que le travail devrait être remis à plat à chaque changement de stratégie numérique. Récemment nous avons développé une nouvelle approche où la diffusion numérique est déterminée non par l'analyse, mais par une optimisation a posteriori au sens où le code est utilisé en boîte noire [1].

L'objet de cette thèse est d'enrichir et de développer cette stratégie dans la perspective de l'amener à une maturité et une généralité suffisantes pour l'appliquer aux codes d'océanographie comme NEMO. Plusieurs étapes sont à franchir par rapport au travail préliminaire [1] dont le cadre reste très académique. Mentionnons en premier lieu le passage à des codes multidimensionnels et la prise en compte de terme sources dans les équations. Pour le passage en dimension supérieure la technique développée pour isoler les interfaces individuellement ne fonctionne pas. Un zoom par maille reste possible mais l'analyse numérique associée est inexistante actuellement. Les termes sources apportent un autre type de difficulté puisque leur influence sur le bilan d'énergie n'est pas signée.

Un autre axe de travail, qui sera traité sur un modèle jouet, concerne la séparation entre la diffusion numérique et la diffusion physique dans l'esprit de [3]. L'équation d'évolution de la salinité de l'eau au niveau continu est donnée par une simple équation d'advection diffusion  $\partial_t S + \nabla \cdot (VS) = \kappa \Delta S$ , où  $V$  est le champs de vitesse 3D variant en temps et en espace et  $\kappa$  est une très petite diffusion moléculaire. À grande échelle le mouvement est en fait mieux décrit par l'équation de même nature  $\partial_t S + \nabla \cdot (VS) = \nabla \cdot (D_\phi(t, x, y, z) \nabla S)$  où  $D_\phi \gg \kappa$  est la viscosité effective. Le choix de  $D_\phi$  est un domaine de recherche actif et correspond à un choix paramétrisation sous-maille. La discrétisation numérique de cette équation introduit un terme de diffusion numérique  $D_\Delta$ . L'approximation obtenue  $S_\Delta$  dépend du schéma et vérifie à l'ordre 1

$$\partial_t S_\Delta + \nabla \cdot (VS_\Delta) = \nabla \cdot (D_\phi \nabla S_\Delta) + \nabla \cdot (D_\Delta \nabla S_\Delta)$$

le terme correctif  $D_\Delta$  disparaît quand le maillage devient de plus en plus fin, mais des investigations numériques indiquent que dans le cadre climatique il est souvent du même ordre que le terme physique  $D_\phi$ . L'idée naturelle dans ce cas est de laisser la diffusion numérique faire le travail de la paramétrisation sous maille afin d'atteindre la diffusion physique cible. Pour pouvoir avancer dans cette direction, il est indispensable de savoir quantifier  $D_\Delta$ . L'objectif de cette partie est de quantifier séparément les deux termes puis de comprendre sur ce modèle jouet comment répartir le travail entre  $D_\Delta$  et la discrétisation de  $D_\phi$  pour obtenir des paramétrisations sous-maille qui dépendent non seulement de l'échelle choisie mais aussi du schéma numérique.

## Références

- [1] N. Aguillon, E. Audusse, V. Desveaux et J. Salomon Discrete entropy inequalities via an optimization process 2023 *hal-03881570*
- [2] B. Fox-Kemper, A. Adcroft, Böning, et al. Challenges and prospects in ocean circulation models. *Frontiers in Marine Science*, vol. 9, 2019
- [3] H. Burchard et H. Rennau. Comparative quantification of physically and numerically induced mixing in ocean models. *Ocean Modelling*, vol. 20 no. 3, 2008.

Contact : Nina Aguillon, Laboratoire Jacques-Louis Lions, [nina.aguillon@sorbonne-universite.fr](mailto:nina.aguillon@sorbonne-universite.fr)

# Quantifying numerical diffusion in ocean circulation models

## 1 PhD Framework

This doctoral thesis is part of a collaboration between mathematicians and oceanographers addressing the issue of numerical diffusion in codes used in global ocean dynamic within the framework of the ANR NASSMOM project. The selected candidate will join the Jacques Louis Lions laboratory at Sorbonne University and the ANGE project team at the INRIA Paris center.

We are seeking for a candidate with a background in hyperbolic partial differential equations (PDE), if possible with some knowledge on numerical analysis for finite volume schemes. It is important that the hired individual is enthusiastic about participating in a multidisciplinary research group and has an interest in numerical experiments.

## 2 Topic description

Global ocean circulation numerical models (OGCMs) are utilized on a planetary spatial scale and over time scales of the order of a century in climate science research. The European model NEMO, for instance, is one of the codes employed in CMIP simulations (Coupled Model Inter-comparison Project) that contribute to the IPCC reports (Intergovernmental Panel on Climate Change). In this context, computational costs strongly constrain the spatial discretization : grid points are typically separated by 100 km from each other. This is roughly the scale of many physical structures such as western boundary currents and mesoscale eddies. These codes employ high-order schemes, splittings, and subgrid parameterizations to be as accurate as possible on coarse grids. The numerical diffusion at such scales is inevitably significant, as evident from the video comparisons available in the NEMO gallery. One effect of numerical diffusion is to smooth strong gradients. In ocean simulations, it is observed that water masses of different temperature and salinity mix more than they should. This phenomenon is known as "spurious mixing" and is identified as one of the key challenges for future developments in OGCMs [2].

The mathematical framework of discrete entropy inequalities provides a good understanding of numerical diffusion by quantifying, at the discrete level, the loss of entropy (or energy) associated with the choice of numerical discretization. However, this framework applies only to a small number of schemes, primarily monolithic and of first order. It is therefore unrealistic to apply it to NEMO, especially considering that the work would need to be overhauled with each change in numerical strategy. Recently, we have developed a new approach where numerical diffusion is determined through an optimization process. The code is only used as a black box [1].

The objective of this thesis is to further develop this strategy with the aim of bringing it to sufficient maturity and generality for application to oceanography codes such as NEMO. Several steps need to be taken compared to the preliminary work [1], which remains rather academic. Firstly, the transition to multidimensional codes and the consideration of source terms in the equations are crucial. For the transition to higher dimensions, the technique developed to isolate individual interfaces does not apply. Zooming by grid cell remains possible, but the associated

numerical analysis is currently nonexistent. Source terms introduce another type of difficulty, as their impact on the energy balance is not straightforward.

Another line of work, which will be addressed using a toy model, concerns the separation between numerical diffusion and physical diffusion in the spirit of [3]. The evolution equation for  $S$  the salinity of water at the continuous level is given by a simple advection-diffusion equation  $\partial_t S + \nabla \cdot (VS) = \kappa \Delta S$ , where  $V$  is the 3D velocity field varying in time and space, and  $\kappa$  is a very small molecular diffusion. On a large scale, the motion is better described by an equation of the same nature,  $\partial_t S + \nabla \cdot (VS) = \nabla \cdot (D_\phi(t, x, y, z) \nabla S)$ , where  $D_\phi \gg \kappa$  is the effective viscosity. The choice of  $D_\phi$  is an active research area and corresponds to a subgrid parameterization choice. The numerical discretization of this equation introduces a term of numerical diffusion  $D_\Delta$ . The obtained approximation  $S_\Delta$  depends on the scheme and satisfies, at order 1,

$$\partial_t S_\Delta + \nabla \cdot (VS_\Delta) = \nabla \cdot (D_\phi \nabla S_\Delta) + \nabla \cdot (D_\Delta \nabla S_\Delta),$$

where the corrective term  $D_\Delta$  disappears as the mesh becomes finer. However, numerical investigations indicate that in the climatic setting, it is often of the same order as the physical term  $D_\phi$ . The natural idea in this case is to let the numerical diffusion handle the subgrid parameterization to achieve the target physical diffusion. To move forward in this direction, it is essential to quantify  $D_\Delta$ . The objective of this part is to separately quantify the two terms and then understand, using this toy model, how to distribute the work between  $D_\Delta$  and the discretization of  $D_\phi$  to obtain subgrid parameterizations that depend not only on the chosen scale but also on the numerical scheme.

References : see page above.

Contact : Nina Aguilon, Laboratoire Jacques-Louis Lions, [nina.aguilon@sorbonne-universite.fr](mailto:nina.aguilon@sorbonne-universite.fr)