IN310
Correction du contrôle continu 2 (07/12/22)

Exercice 1

Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ comme : $x\mathcal{R}y \iff |x+y| = |x| + |y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Réfléxivité Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|x+x| = |2x| = |2||x| = 2|x| = |x| + |x|$, où l'égalité $=$ est vérifiée d'après l'égalité $|x_1 x_2| = |x_1||x_2|\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi la relation est bien réflexive.

Symétrie Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est bien symétrique. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x\mathcal{R}y$. Alors, $|x+y| = |x| + |y|$. Mais par commutativité de l'addition (utilisée pour les égalités $=$), on observe:

$$|y+x| = |x+y| = |x| + |y| = |y| + |x|.$$

Ainsi, $|y+x| = |y| + |x|$ et la relation est donc bien symétrique.

Transitivité *Contre-exemple à la transitivité* : $x = 1, y = 0, z = -1$. On a alors:

- $|x+y| = |1+0| = |1| = |1| + 0 = |1| + |0| = |x| + |y|$
- $|y+z| = |0-1| = |-1| = 0 + |-1| = |0| + |-1| = |y| + |z|$.
- Mais d'une part, $|x+z| = |1-1| = |0| = 0$, et d'autre part $|x| + |z| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$. Donc $|x+z| = 0 \neq 2 = |x| + |z|$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff 3 \mid x - y.$$

Dressons une liste exhaustive des classes d'équivalences pour cette relation. Implicitement, il est donc précisé que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En particulier, on en déduit que

$$x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x \iff 3 \mid y - x.$$

$\bar{\mathbf{0}}$ Commençons avec $\bar{0}$. On observe:

$$1-0=1 \quad 2-0=2 \quad 3-0=3 \quad 4-0=4 \quad 5-0=5$$

$$6-0=6 \quad 7-0=7 \quad 11-0=11 \quad 12-0=12.$$

Or $3, 6, 12$ sont divisibles par 3 mais $1, 2, 4, 5, 7, 11$ ne sont pas divisibles par 3. On en déduit donc que $\bar{0} = \{0, 3, 6, 12\}$.

$\bar{\mathbf{1}}$ Le plus petit élément de $S \setminus \bar{0}$ est 1. On continue donc naturellement (mais arbitrairement) avec $\bar{1}$. On observe:

$$2-1=1 \quad 4-1=3 \quad 5-1=4 \quad 7-1=6 \quad 11-1=10.$$

Or $3, 6$ sont divisibles par 3 mais $1, 4, 10$ ne sont pas divisibles par 3. On en déduit donc que $\bar{1} = \{1, 4, 7\}$.

$\bar{\mathbf{2}}$ Le plus petit élément de $S \setminus (\bar{0} \cup \bar{1})$ est 2. On continue donc naturellement (mais arbitrairement) avec $\bar{2}$. On observe:

$$5-2=3 \quad 11-2=9.$$

Or 3 et 9 sont divisibles par 3. On en déduit donc que $\bar{2} = \{2, 5, 11\}$.

Finalement on observe que $S = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$. On a donc listé exhaustivement toutes les classes d'équivalences.

Exercice 3

Soient $a = 181$ et $b = 43$.

1. Calculons le pgcd de a et b avec l'algorithme d'Euclide.

$$181 = 4 \times 43 + 9$$

$$43 = 4 \times 9 + 7$$
$$9 = 1 \times 7 + 2$$
$$7 = 3 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

"Le pgcd est le dernier reste non nul". On en déduit donc que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

2. Cherchons des coefficients de Bezout grâce à l'algorithme d'Euclide étendu.

$$\begin{array}{ccccc} 181 & = & 1 \times 181 & + & 0 \times 43 \\ 43 & = & 0 \times 181 & + & 1 \times 43 \\ 9 & = & 1 \times 181 & + & \text{-4} \times 43 \\ 7 & = & \text{-4} \times 181 & + & 17 \times 43 \\ 2 & = & 5 \times 181 & + & \text{-21} \times 43 \\ 1 & = & \text{-19} \times 181 & + & 80 \times 43 \end{array}$$

Ainsi, $(u, v) = (-19, 80)$ est un couple satisfaisant l'équation de Bezout.

3. D'après la question précédente, nous savons que:

$$1 = -19 \times 181 + 80 \times 43.$$

Modulo 181, nous obtenons donc:

$$1 = 80 \times 43 \quad [181].$$

Cela signifie précisément que 80 est l'inverse de 43 modulo 181.

Exercice 4

1.

a) $12 \times 16 + 7 = -1 \times 3 + 7 = \mathbf{4}$ [13]

b) $36 \times 22 = (2 \times 18) \times 3 = (2 \times (-1)) \times 3 = -6 = 19 - 6 = \mathbf{13}$ [19]

c) $(27 + 23) \times 50 = (3 + (-1)) \times (2 \times 25) = 2 \times (2 \times 1) = \mathbf{4}$ [24]

d) $566 \times 31 = (20 \times 28 + 6) \times 3 = 6 \times 3 = \mathbf{18}$ [28]

e) $428 \times 2115 = (20 * 21 + 8) \times (21 * 100 + 15) = 8 * 15 = 8 * (-6) = -48 = \mathbf{15}$ [21]

2. Soit $n \geq 2$. Un élément $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si est seulement si n et a sont premiers entre eux. On observe que 10 et 13 sont premiers entre eux (13 est premier et 13 ne divise pas 10). En revanche, 2 est un diviseur commun à 4 et 22 donc 4 et 22 ne sont pas premiers entre eux. On en déduit donc que 10 est inversible modulo 13. En revanche, 4 n'est pas inversible modulo 22.

3. $4^4 = 4^2 \times 4^2 = 16 \times 16 = 6 \times 6 = 36 = 6$ [10]
$3^7 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3 = 9 \times 9 \times 9 \times 3 = -1 \times -1 \times -1 \times 3 = -3 = 10 - 3 = 7$ [10].

Exercice 5

Soient A la matrice et le vecteur v suivants:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 19 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Calculons le déterminant de A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = +(-1) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (-1) \times (-1) \times (-3) \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \times 10 = \mathbf{-30}.$$

Détails des étapes:

1. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ (opérations qui ne modifient pas le déterminant)
2. Développement par rapport à la 1ère colonne de la matrice 4x4.
3. Développement par rapport à la 2ème ligne de la matrice 3x3.
4. Formule du déterminant d'une matrice 2x2.

b) Résolvons le système $AX = v$ d'inconnues $X = (x, y, z, w)$ avec la méthode de Gauss. Pour cela on considère la matrice augmentée $(A|v)$ et on échelonne A.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & -5 & -11 \\ -1 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 4 & 7 & 19 \\ 0 & 5 & 2 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \tag{1}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \tag{2}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2/5 \qquad L_3 \leftarrow -L_3/3 \qquad L_4 \leftarrow L_4/2 \tag{3}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \tag{4}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 5L_4 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \tag{5}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 + 2L_3 \tag{6}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow -L_1 \tag{7}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit que le système admet une unique solution :

$$\boldsymbol{(x, y, z, w) = (5, -1, 2, 1)}.$$