Examen partiel du 16 décembre 1999

Préambule ne faisant l'objet d'aucune question, mais pouvant être utile dans les exercices **1.** *et* **6.** *:*
On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}\, x$ *est l'unique réel* y *qui est compris strictement entre* $-\dfrac{\pi}{2}$ *et* $\dfrac{\pi}{2}$, *et tel que* $\tan y = x$ *(ainsi exemple* $\mathrm{Arctan}\, 1 = \dfrac{\pi}{4}$ *;* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}\, x = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}\, x = -\dfrac{\pi}{2}$*).* *De la formule* $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ *on déduit en posant* $\mathrm{Arctan}\, x = \alpha,\ \mathrm{Arctan}\, y = \beta,$ *que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, y = \mathrm{Arctan}\, \dfrac{x-y}{1+xy}$. *La fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, impaire, et bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, *de dérivée donnée par* $(\mathrm{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *De la valeur de cette dérivée, on déduit avec un peu de calculs que : 1/* $\mathrm{Arctan}\, x = x + o(x)$ *au voisinage de* 0 *; 2/* $\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Arctan}\, x| \leq |x|$ *; 3/* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x)$, *où* sgn *est la fonction signe, qui vaut* 1 *pour* $x > 0$ *et* -1 *pour* $x < 0$.

1. (4 points) Soit la fonction de la variable réelle x définie par $f_n(x) = x\mathrm{Arctan}\, nx$. Déterminer, pour x réel fixé, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur $\mathbb{R}$. Examiner la convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ (en commençant par calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ pour tout x réel). Montrer qu'elle ne peut converger uniformément dans aucun intervalle ouvert contenant 0.

2. (3 points) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}+(-1)^n}$?

(Indication : on pourra calculer $\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} - \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}+(-1)^n}$)

3. (3 points) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$? (On pourra utiliser un développement limité en $\dfrac{1}{n}$ de $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}$ et une formule de trigonométrie élémentaire)

4. (3 points) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\alpha^n$, avec $\alpha > 0$? (Discuter suivant la valeur de α.)

5. (3 points) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}$, avec $\alpha > 0$? (Utiliser la règle de Raabe et Duhamel.)

T.S.V.P.

6. (3 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \text{Arctan}\, \frac{1}{1+n+n^2}$? Calculer la somme de la série (commencer par calculer $\text{Arctan}\,(n+1) - \text{Arctan}\, n$).

7. (5 points) On définit pour tout x réel : $u_n(x) = \frac{e^{inx}}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$; en déduire que sa somme S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée u_n' de u_n ; montrer, en étudiant les variations de la fonction $g_n : x \mapsto \frac{x}{n^2+x^2}$, que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{x}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{2n}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ |u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^4}$, puis, que la série $\sum_{n\geq 1} u_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que S est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

UNIVERSITÉ PARIS VIII **SÉRIES**
DEUG MASS/MIAS **1999-2000**

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 1999

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\dfrac{\pi}{2}$ on a : $\lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{Arctan} nx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}x & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -\dfrac{\pi}{2}x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

$(= \dfrac{\pi}{2}|x|)$. Soit donc f la fonction $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ainsi définie sur $\mathbb{R}$.
Si $x=0$, $|f(x)-f_n(x)| = 0$;
si $x>0$, $|f(x)-f_n(x)| = x\left|\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} nx\right| = x \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{nx} \leq x\dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{n}$;
si $x<0$, $|f(x)-f_n(x)| = |x|\left|\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan} nx\right| = |x|\left|\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} n|x|\right| = |x|\left|\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n|x|}\right|$

$$\leq |x|\,\frac{1}{n|x|} = \frac{1}{n}$$

Donc dans tous les cas, $|f(x)-f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, uniformément en $x\in\mathbb{R}$ lorsque $n\longrightarrow\infty$: la convergence des f_n vers f est bien uniforme sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de f_n est donnée par : $f_n'(x) = \operatorname{Arctan} nx + \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$
Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arctan} nx = \dfrac{\pi}{2}$ si $x>0$, $-\dfrac{\pi}{2}$ si $x<0$, et 0 si $x=0$, et que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ pour tout x fixé, on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$
Cette fonction est discontinue en 0 : donc la convergence des f_n' ne peut être uniforme sur aucun intervalle ouvert contenant 0, sinon la fonction $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ serait continue en 0.

2. On a : $\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} - \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n\left[n+(-1)^n-n\right]}{n\sqrt{n}(n\sqrt{n}+(-1)^n)} = \dfrac{1}{n^3+(-1)^n n\sqrt{n}}$
Pour tout $n\geq 2$, $n^3+(-1)^n n\sqrt{n} \geq 0$, donc $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^3+(-1)^n\sqrt{n}}$ est une série à termes réels positifs dont le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$ à l'infini, donc elle converge. Comme d'autre part $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ (série alternée) est convergente, $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} - \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^3+(-1)^n\sqrt{n}}$ différence de deux séries convergentes, est convergente.

3. Le développement limité $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x+o(x)$ au voisinage de 0 permet d'écrire :
$\sin\pi\sqrt{n^2+1} = \sin\pi n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sin\pi n\left(1+\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{n^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ (où $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$), d'où :
$\sin\pi\sqrt{n^2+1} = \sin\left(\pi n+\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{\pi}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \sin\pi n\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{\pi}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) + \cos\pi n\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{\pi}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
$= (-1)^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{\pi}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\dfrac{\pi}{2n} + (-1)^n\dfrac{\pi}{n^2}\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (où $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$), d'où :
$\left|\sin\pi\sqrt{n^2+1} - (-1)^n\dfrac{\pi}{2n}\right| \leq \dfrac{\pi}{n^2}$ et donc $\sum\limits_{n\geq 1}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$ est somme d'une série alternée et d'une

série absolument convergente : donc elle converge.

4. Ici la règle de d'Alembert s'impose :
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\right]\alpha=\alpha$, donc : si $\alpha<1$, la série converge, et si $\alpha>1$, la série diverge ; enfin si $\alpha=1$, le terme général de la série est $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\geq 1$, qui ne peut tendre vers 0, et la série diverge dans ce cas aussi.

5. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+1}{\alpha+n+1}=\dfrac{1}{1+\frac{\alpha}{n+1}}=1-\dfrac{\alpha}{n+1}+o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc, d'après la règle de Raabe et Duhamel (par comparaison avec une série de Riemann), la série converge pour $\alpha>1$ et diverge pour $\alpha<1$; enfin le cas $\alpha=1$ donne la série harmonique, qui diverge.

6. Pour $n\to\infty$, $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+n+n^2}\sim\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geq 0}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+n+n^2}$ converge. Pour calculer la somme de cette série, calculons d'abord : $\operatorname{Arctan}(n+1)-\operatorname{Arctan}n=\operatorname{Arctan}\dfrac{n+1-n}{1+(n+1)n}=\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+n+n^2}$ d'où :
$\sum\limits_{n\geq 0}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+n+n^2}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+n+n^2}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}[\operatorname{Arctan}(n+1)-\operatorname{Arctan}n]=$
$\lim\limits_{N\to\infty}[\operatorname{Arctan}1+\operatorname{Arctan}2-\operatorname{Arctan}1+\ldots+\operatorname{Arctan}N-\operatorname{Arctan}(N-1)+\operatorname{Arctan}(N+1)-\operatorname{Arctan}N]=$
$\lim\limits_{N\to\infty}\operatorname{Arctan}(N+1)=\dfrac{\pi}{2}$

7. $\forall x\in\mathbb{R}, |u_n(x)|\leq\dfrac{1}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\dfrac{1}{n^3}$, terme général d'une série convergente. Donc, comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, et que $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ la somme S de cette série de fonctions est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus :
$u_n'(x)=\dfrac{ine^{inx}}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{3xe^{inx}}{(n^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\Longrightarrow|u_n'(x)|\leq\dfrac{n}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{|x|}{n^2+x^2}\dfrac{3}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Étudions les variations de la fonction $g_n : x\mapsto\dfrac{x}{n^2+x^2}$: elle a pour dérivée $g_n' : x\mapsto\dfrac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ qui ne s'annule sur $\mathbb{R}_+$ qu'en $x=n$, où g_n présente un maximum égal à $\dfrac{n}{n^2+n^2}=\dfrac{1}{2n}$; de plus g_n est impaire, et donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|g_n(x)|=\dfrac{1}{2n}$. D'où : $\forall x\in\mathbb{R}, |u_n'(x)|\leq\dfrac{n}{n^3}+\dfrac{1}{2n}\dfrac{3}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{2n^4}$: la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}u_n'$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que : 1/ les u_n' étant continues et la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1}u_n'$ uniforme sur $\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geq 1}u_n'$ est continue sur $\mathbb{R}$; 2/ $S=\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, de dérivée $S'=\sum\limits_{n\geq 1}u_n'$ continue, i.e. $S=\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.