UNIVERSITÉ PARIS VIII **SÉRIES**
DEUG MIAS **2004-2005**

Examen partiel du 20 mai 2005

1. (4 points) Nature des séries : a/ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}(n^2+1)}{n^4+n^2+1}$; b/ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+2n}\right)$;
c/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)2^{-n}$; d/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

2. (6 points) Nature des séries :
a/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$; b/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{Arc\,tan} n}{n^2}$; c/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$; d/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n+n^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}$.
(NB : pour c/ et d/, on retranchera dans chacun des deux cas au terme général de la série le terme général d'une série alternée.)

3. (4 points) Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$
a/ Montrer que pour $n \longrightarrow +\infty$, $u_n - \dfrac{(-1)^n}{n} \approx \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^2}$.
b/ Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$ et montrer que $\forall n \geq 4,\ \ln n \leq \sqrt{n}$.
c/ En déduire d'abord que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$ est absolument convergente, et ensuite que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

4. (4 points) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(n^{\frac{1}{n}}-1-\frac{\ln n}{n}\right)$? (On commencera par étudier $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$ en montrant que : $\exists N,\ n \geq N \Rightarrow (\ln n)^2 \leq \sqrt{n}$, et pour cela on pourra étudier $f\ :\ \mapsto \ln x - x^{\frac{1}{4}}$ et montrer que f est décroissante et p. ex. pour $x \geq 2^{16},\ f(x) \leq 0$.)

5. (6 points) a/ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ est dérivable terme terme, i.e. que la dérivée de la somme de la série est la somme de la série des dérivées, sur $]-1,1[$ (montrer pour cela que la série des dérivées converge normalement sur tout intervalle compact $[-a,a]$, $0 < a < 1$, de $]-1,1[$) et en déduire que $\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
b/ On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} x^n e^{-nx^2}$. En utilisant le fait que $f_n(x) = [\xi(x)]^n$ avec $\xi(x) = xe^{-x^2}$ et en étudiant les variations de $x \mapsto \xi(x)$ sur $\mathbb{R}$, calculer à l'aide du a/ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^n e^{-nx^2}$ pour x réel quelconque.