

Examen partiel du 17 décembre 2003

1. (4 points) Nature des séries : a/ $\sum_{n \geq 1} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$; b/ $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n}$.

2. (6 points) On se propose de calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n}$, et pour cela on considère la série de fonctions $f(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-nx}$: montrer qu'elle converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, et qu'elle est deux fois dérivable sur $[a, +\infty[$ (justifier les calculs à l'aide des théorèmes du cours). Calculer $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n}$.

3. (4 points) Exprimer $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n}$ (où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$) à l'aide de $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et de $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+2}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n}$ converge et calculer sa somme (on rappelle que pour $a > 0, b \geq 0$, $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$).

4. (4 points) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^{2n} e^{-nx^2}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} et calculer sa somme $S(x)$. Montrer que S est dérivable sur \mathbb{R} , calculer $S'(x)$ et en déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} n 2^n e^{-2n}$.

5. (6 points) Montrer que la série de fonctions $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\text{Arc tan } nx}{n^2}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} et que sa somme est impaire. Montrer qu'elle est continûment dérivable sur toute partie de \mathbb{R} de la forme $\{|x| \geq a\}$ (où $a > 0$). Que dire de $f'(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$? Montrer que $f''(x)$ existe sur toute partie de la forme $\{|x| \geq a\}$ de \mathbb{R} , que f est convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ . Tracer sommairement le graphe de f sur \mathbb{R} .

Corrigé de l'examen partiel du 17 décembre 2003

1. a/ Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $1 - e^{-\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$ donc $\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n^2}$ et donc $\sum_{n \geq 1} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

b/ Ici, le critère de d'Alembert donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-n-1}}{n^2 e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$, donc la série $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n}$ converge.

2. Pour $x \geq a > 0$, $e^{-nx} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série de fonctions $f(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, si $a > 0$.

La somme f de la série, qui est pour tout x une série géométrique, se calcule sans peine :

$\sum_{n \geq 0} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$. La série des dérivées $-\sum_{n \geq 0} n e^{-nx}$ et la série des dérivées secondes $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-nx}$ convergent aussi normalement sur $[a, +\infty[$, puisque $n e^{-nx} \leq n e^{-na}$ et $n^2 e^{-nx} \leq n^2 e^{-na}$

et que pour $n \rightarrow +\infty$, $\frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{n e^{-na}} \rightarrow e^{-a} < 1$ et $\frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)a}}{n^2 e^{-na}} \rightarrow e^{-a} < 1$ (critère de d'Alembert). Donc, la série des dérivées et la série des dérivées secondes convergent uniformément sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, f est 2 fois dérivable sur \mathbb{R}^* ($a > 0$ pouvant être choisi aussi proche de 0 que l'on veut, la convergence a en fait lieu sur \mathbb{R}^*), et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\sum_{n \geq 0} n e^{-nx}$, et $f''(x) = \sum_{n \geq 0} n^2 e^{-nx}$.

On calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ en dérivant (pour $x > 0$) la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1} : f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ et

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{2x}}{(e^x - 1)^3}, \text{ d'où : } \sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n} = f''(1) = \frac{e + e^2}{(e - 1)^3}.$$

3. Pour $n = 2k$ ou $2k + 1$, on a $\left[\frac{n}{2}\right] = k$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{2k}$
 $= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = [\text{Arc tan } t]_0^1 - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

4. Une étude des variations de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x^2}$ montre qu'elle est paire et que sur \mathbb{R}_+ , sa dérivée $x \mapsto 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$ est positive entre 0 et 1, négative pour $x > 1$, avec un maximum égal à $\frac{1}{e}$ en $x = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{2n} e^{-nx^2} \leq e^{-n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série $\sum_{n \geq 0} x^{2n} e^{-nx^2}$ converge normalement sur \mathbb{R} et sa somme est $S(x) = \sum_{n \geq 0} \left(x^2 e^{-x^2}\right)^n = \frac{1}{1 - x^2 e^{-x^2}}$.

De même on peut majorer terme à terme la série des dérivées $\sum_{n \geq 0} 2x(1 - x^2)e^{-x^2} n \left(x^2 e^{-x^2}\right)^{n-1}$

$= \sum_{n \geq 0} 2x(1-x^2)e^{-x^2}(n+1) \left(x^2e^{-x^2}\right)^n$: d'une part $x^2e^{-x^2}$ est borné sur \mathbb{R} par $\frac{1}{e}$, d'autre part $\forall x \in \mathbb{R}$, $|2x| \leq 1+x^2$ (puisque $(1-|x|)^2 \geq 0$) et $|1-x^2| \leq 1+x^2$, donc $|2x(1-x^2)| \leq (1+x^2)^2$ et donc $|2x(1-x^2)e^{-x^2}| \leq (1+x^2)^2e^{-x^2} = e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2} + x^4e^{-x^2} = e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2} + 4 \left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]^2 \leq 1 + \frac{2}{e} + \frac{4}{e^2} = M$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|2x(1-x^2)e^{-x^2}(n+1) \left(x^2e^{-x^2}\right)^n| \leq M(n+1)e^{-n}$, terme général d'une série convergente (critère de d'Alembert, par exemple), donc comme la série des dérivées $\sum_{n \geq 0} 2x(1-x^2)e^{-x^2}n \left(x^2e^{-x^2}\right)^{n-1}$ est normalement convergente, S est dérivable terme à terme sur \mathbb{R} ,

i.e. $S'(x)$ est égale à la somme de la série des dérivées : $S'(x) = \frac{2(1-x^2)}{x} \sum_{n \geq 0} n \left(x^2e^{-x^2}\right)^n$, et en

faisant $x = \sqrt{2}$, on obtient, puisque par ailleurs $S'(x) = \left(\frac{1}{1-x^2e^{-x^2}}\right)' = \frac{2x(1-x^2)e^{-x^2}}{(1-x^2e^{-x^2})^2}$:

$$\sum_{n \geq 0} n2^n e^{-2n} = \frac{x}{2(1-x^2)} S'(x) \Big|_{x=\sqrt{2}} = \frac{x}{2(1-x^2)} \left(\frac{2x(1-x^2)e^{-x^2}}{(1-x^2e^{-x^2})^2} \right) \Big|_{x=\sqrt{2}} = \frac{2e^{-2}}{(1-2e^{-2})^2}.$$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arc tan } x| \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\frac{|\text{Arc tan } nx|}{n^2} \leq \frac{\pi}{2n^2}$, terme général d'une série convergente, donc cette série de fonctions est normalement convergente sur \mathbb{R} , et sa somme est impaire comme chacun des ses termes. Sur toute partie de \mathbb{R} de la forme $\{|x| \geq a\}$, où $a > 0$, la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est normalement convergente, et donc $f'(x)$ existe pour tout $x \neq 0$. Mais cette majoration ne tient plus en 0 (i.e. si on ne suppose plus $|x| \geq a > 0$):

$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ devient aussi grand qu'on veut pour $N \rightarrow +\infty$, i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$: le graphe de f admet en 0 une tangente verticale (à la différence de $x \mapsto \text{Arc tan } x$, qui a en 0 une tangente de pente 1).

La série des dérivées secondes $\sum_{n \geq 1} \frac{-2nx}{(1+n^2x^2)^2}$ converge aussi normalement sur toute partie de la forme

$\{|x| \geq a\}$ de \mathbb{R} (où $a > 0$), puisque $1+n^2x^2-2n|x| = (1-n|x|)^2 \geq 0$, donc $\frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leq 1$ et

$\frac{2n|x|}{(1+n^2x^2)^2} \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1+n^2a^2} \leq \frac{1}{a^2n^2}$, donc $f''(x)$ existe pour tout $x \neq 0$, et $f''(x) > 0$ pour $x < 0$, $f''(x) < 0$ pour $x > 0$ (comme chacun des termes de la somme). Il en résulte que f est convexe (i.e. le graphe de f tourne sa concavité vers le haut) pour $x < 0$, et concave (i.e. le graphe de f tourne sa concavité vers le bas) pour $x > 0$. Le tracé (approximatif) du graphe de f ne présente pas de difficulté : fonction impaire, donc symétrie par rapport à l'origine, où la courbe admet une tangente verticale, convexité sur \mathbb{R}_- et concavité sur \mathbb{R}_+ , asymptotes horizontales $y = \pm \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ pour $x \rightarrow \pm\infty$ (en

effet, par continuité de f , le passage à la limite pour $x \rightarrow \pm\infty$ à l'intérieur du signe \sum est justifié). Pour préciser des valeurs numériques pour le tracé, on peut calculer (à la calculatrice programmable ou à l'ordinateur) : $\frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \approx 2.7$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.12$, $f(1) \approx 1.6$, $f(2) \approx 2$, $f(4) \approx 2.3, \dots$