UNIVERSITÉ PARIS VIII **SÉRIES**
DEUG LIT **1996-97**

Examen final (2$^{\text{e}}$ session) du 16 septembre 1997

1. (2 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+2n}\right)$?

(utiliser l'identité : $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ et comparer avec une série de Riemann)

2. (4 points) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge (comparer avec une série de Riemann). Montrer que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$; en déduire la somme de la série en l'exprimant comme différence des sommes de deux séries.

3. (6 points) a/ Soit la fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{2x}}{1-x}.\end{array}$

On rappelle que la fonction exponentielle est développable en série entière dans $\mathbb{C}$ tout entier et que $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n$ pour $|x|<1$; f est ainsi développable en série entière pour $|x|<1$. Soit $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ son développement : $\forall x\in D(0,1)$, $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$. On se propose de déterminer les $(a_n)_{n\geq 0}$.

a/ Montrer que pour $|x|<1$, $e^{2x}=\sum_{n\geq 0}a_nx^n-\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1}$.

b/ En déduire que $\sum_{n\geq 0}\dfrac{2^n}{n!}x^n=a_0+\sum_{n\geq 1}(a_n-a_{n-1})x^n$ et que : $a_0=1$, et $\forall k\geq 1$, $a_k-a_{k-1}=\dfrac{2^k}{k!}$

c/ En sommant les égalités obtenues pour $k=1,2,\dots,n$, en déduire que : $\forall n\geq 0$, $a_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{2^k}{k!}$

4. (8 points + 4 points de bonus au b/(ii)) Soit f définie, pour $x\in\mathbb{R}$, par : $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

(f est donc la primitive de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en $x=0$).

a/ Développer en série entière $e^{-\frac{x^2}{2}}$ et en déduire par intégration le développement en série entière de $f(x)$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b/ On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

(i) Exprimer ce nombre comme somme d'une série à l'aide du a/ et montrer qu'il s'agit d'une série alternée, i.e. de la forme $\sum_{n\geq 0}(-1)^nu_n$, avec $(u_n)_{n\geq 0}$ positive et décroissante.

(ii) On pourra admettre (mais c'est facile à démontrer, et il y a 4 points de bonus pour une démonstration correcte de ce résultat élémentaire) que le reste à l'ordre p d'une série alternée $\sum_{n\geq 0}(-1)^nu_n$ est inférieur en valeur absolue à la valeur absolue du premier terme négligé, soit u_{p+1}, c'est-à-dire :

$$(u_n)_{n\geq 0}\text{ positive décroissante}\Rightarrow\left|\sum_{p+1}^{\infty}(-1)^nu_n\right|\leq u_{p+1}.$$

Montrer que le reste d'ordre 1 (i.e. la somme de 2 à $+\infty$) de la série trouvée en (i) est inférieur à 10^{-3}, et en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.