UNIVERSITÉ PARIS VIII **SÉRIES**
DEUG MIAS **2004-2005**

Examen final du 28 juin 2005

1. (5 points Nature des séries :
a/ $\sum \dfrac{2^{-3n}(2n)!}{(n!)^2}$; b/ $\sum \dfrac{2^n n^{n^2+1}}{(n+1)^{n^2-1}}$; c/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\tan n\right)$; d/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2n}$ et
e/ $\sum\left(\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+2n}\right)$.

2. (4 points) Montrer que la série $\sum \sin \pi\sqrt{n^2+1}$ converge et que la série $\sum \tan \pi\sqrt{n^2+1}$ diverge (utiliser les formules $\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$ et $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ et le développement limité à l'origine de $x\mapsto \sqrt{1+x}$).

3. (5 points) Développer en série entière : a/ $x\mapsto \ln(1+x^2)$; b/ $x\mapsto\sqrt{1+x^3}$; c/ $x\mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$

4. (5 points) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la varible réelle x, de somme $s(x)$ à l'intérieur de son intervalle de convergence. On se propose de calculer $\sum n a_n x^n$, $\sum n^2 a_n x^n$ et $\sum n^3 a_n x^n$.
a/ Montrer que ces séries ont même rayon de convergence que $\sum a_n x^n$.
b/ En utilisant les identités : $n^2 = n(n-1)+n$ et $n^3 = n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$, exprimer $\sum a_n x^n$ à l'aide de $s'(x)$, $\sum n^2 a_n x^n$ à l'aide de $s'(x)$ et $s''(x)$ et $\sum n^3 a_n x^n$ à l'aide de $s'(x)$, $s''(x)$ et $s'''(x)$.
c/ Application : en précisant leurs rayons de convergence respectifs, donner la somme des séries :
$\sum n x^n$, $\sum n^2 x^n$, $\sum n^3 x^n$, $\sum \dfrac{nx^n}{n!}$, $\displaystyle\sum \frac{n^2x^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{n^3x^n}{n!}$.

5. (6 points) On définit pour tout $x\in\mathbb{R}$: $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Montrer que la série de fonctions $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n'(x)$ converge également normalement sur $\mathbb{R}$ (NB : on pourra montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{|x|}{x^2+n^2}\leq\dfrac{1}{2n}$) et en déduire que S est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En admettant que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $S'(0)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.