Examen final du 4 février 2000

1. (6 points) En utilisant des développements limités en $\dfrac{1}{n}$, étudier la convergence des séries numériques :
$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \sum_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right\} \text{ et } \sum_{n\geq 1}\left\{1-n\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\right\}.$$
En vérifiant que $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{N+1}{2N}$, calculer la somme de la première série.

2. (6 points) On se propose de calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$. Montrer (à l'aide de la règle de Raabe et Duhamel) que cette série n'est pas absolument convergente, mais néanmoins semi-convergente (vérifier que c'est une série alternée, i.e. de la forme $\sum(-1)^n u_n$, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante *vers zéro* [1] de réels positifs). Pour calculer la somme de cette série, on considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}x^n$. Vérifier que c'est le développement en série entière de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Montrer, à l'aide du " critère d'Abel uniforme" [2] sur $[0,1]$, que cette série entière converge uniformément sur $[0,1]$ (*N.B. : fermé du côté de 1 !*) et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.

3. (4 points) On se propose de calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}$. On considère pour cela la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2x^n$. Quel est son rayon de convergence ? Soit $f(x)$ sa somme ; en écrivant $n^2=n(n-1)+n$, montrer que $f(x)=x^2g''(x)+xg'(x)$, où g est une fonction connue. En déduire $f(x)$ comme une fraction rationnelle en x et calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}$.

4. (4 points) Montrer que la série de fonctions de la variable réelle x : $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge normalement dans tout intervalle de la forme $[a,b]$, avec $b>a>0$. En déduire que sa somme est une fonction continue de x sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer cette somme. Pourquoi la convergence de la série ne peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}_+$ tout entier ?

5. (6 points) On se propose de démontrer la formule : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+n)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}$, valable pour $x\notin\mathbb{Z}$, et qu'il suffit de démontrer pour $x\in]0,1[$, la fonction définie par la somme de la série, pour autant qu'elle ait un sens, étant manifestement périodique de période 1.

a/ Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+n)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+x)^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1-x)^2}$. En déduire que pour $x\in]0,1[$ la série converge et que sa somme est une fonction continue de x dans $]0,1[$.

b/ Soit x un réel, et f la fonction 2π-périodique définie par $f(t)=e^{-ixt}$ pour $t\in]-\pi,\pi]$, prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Calculer les coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$ de f et utiliser le théorème de Parseval-Plancherel pour en déduire le résultat.

[1] pour démontrer ce dernier point, on pourra admettre la *formule de Stirling* : pour $n\to+\infty$, $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$

[2] dont une forme particulière est : si $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions d'une partie E de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur E vers 0, et si $\forall x\in E, \varepsilon_{n+1}(x)\leq\varepsilon_n(x)$, alors $\sum(-1)^n\varepsilon_n$ converge uniformément sur E.