UNIVERSITÉ PARIS VIII **SYSTÈMES DYNAMIQUES**
Licence / maîtrise de mathématiques **2002-2003**
Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen partiel du 30 avril 2003 (suivi de son corrigé)

1. (6 points) On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$:
$\begin{cases} x' = -3x + y + 1 \\ y' = 2x - 4y + r(t) \end{cases}$ où $r(t)$ vaut soit 0, soit e^{-t}.
a/ Donner la solution générale du système homogène associé.
b/ On suppose $r(t) = 0$. Montrer qu'il existe une solution particulière constante du système complet (i. e. un point fixe du système ; ce point fixe est-il stable ?) et donner la solution générale du système complet, puis l'unique solution de condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.
c/ On suppose $r(t) = e^{-t}$. Montrer que le système complet admet une solution particulière de la forme ($x = a + be^{-t}$, $y = c + de^{-t}$) (N.B. : on doit trouver $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{5}$, $d = \frac{1}{2}$) et donner la solution générale du système complet, puis l'unique solution de condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.
d/ Que se passe-t-il dans tous les cas pour les trajectoires lorsque $t \longrightarrow +\infty$?

2. (6 points) On donne l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$:

$$y'' + ty' + y = 0$$

Montrer qu'elle admet pour solution particulière $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Chercher alors la solution générale sous la forme $y = ze^{-\frac{t^2}{2}}$ et montrer que z' satisfait à une équation linéaire homogène que l'on intègrera ; on en déduira la solution générale z en fonction de $\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du$, et enfin la solution générale de l'équation en y. Quelle est l'unique solution de condition initiale $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$?

3. (6 points) On donne l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$:

$$y' = -y^2 + a(t)y + b(t)$$

Déterminer $a(t)$ et $b(t)$ dans cette équation de Riccati pour que $-t$ et $\frac{1}{t}$ en soient des solutions particulières. Résoudre alors cette équation. Indications : on posera $z = y + t$ et on montrera que cette équation en y devient $z' = -z^2 + \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1} z$, équation de Bernoulli, qui devient à son tour, en posant $u = \frac{1}{z}$, l'équation linéaire : $u' = 1 - \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1} u$: on résoudra alors cette équation en u par variation de la constante, en remarquant que $\left(te^{\frac{t^2}{2}}\right)' = (1 + t^2)e^{\frac{t^2}{2}}$; on en déduira z, puis y. N.B. : on doit trouver $y = \frac{1 - \lambda te^{-\frac{t^2}{2}}}{t + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}$. Déterminer l'unique solution de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Vérifier que $\frac{1}{t}$ et $-t$ sont bien des solutions particulières, correspondant respectivement à $\lambda = 0$ et à $\lambda \longrightarrow +\infty$.

T. S. V. P.

4. (6 points) On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' &= -tx - y + te^{-t} \\ y' &= -x - ty + te^{-t} \end{cases}$$

a/ Montrer que ($x = e^{-t}$, $y = e^{-t}$) en est une solution particulière.

b/ Montrer que le système homogène associé a pour solution générale :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{\int_0^t \begin{bmatrix} -u & -1 \\ -1 & -u \end{bmatrix} du} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}I - tJ} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = R(t). \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer cette exponentielle de matrice (N.B. : I commutant avec toute matrice, $e^{-\frac{t^2}{2}I - tJ} = e^{-\frac{t^2}{2}I}.e^{-tJ}$) et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$R(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{ch}t & -\mathrm{sh}t \\ -\mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{bmatrix}$$

c/ En déduire la solution générale du système homogène, puis celle du système complet. Quel est le comportement à l'infini (i. e. pour $t \longrightarrow +\infty$ et pour $t \longrightarrow -\infty$) des trajectoires solutions ?(N.B. pour $t \longrightarrow -\infty$, chercher une asymptote)

d/ Déterminer l'unique solution de condition initiale ($x(0) = 2$, $y(0) = 4$).

Corrigé de l'examen partiel du 30 avril 2003

1. a/ Le système homogène : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -3x + y \\ y' & = & 2x - 4y \end{array}\right.$ a pour solution générale $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{tA}.\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.
Calculons cette exponentielle de matrice :
$|A - \lambda I| = (3+\lambda)(4+\lambda) - 2 = (\lambda+2)(\lambda+5)$: il y a 2 valeurs propres, -2 et -5.
$\mathrm{Ker}(A+2I) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A+5I) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, d'où : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ et

$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{-2t} + e^{-5t} & e^{-2t} - e^{-5t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-5t} & e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix}$, d'où la solution générale du système homogène :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} x & = & \frac{\alpha}{3}(2e^{-t} + e^{-5t}) + \frac{\beta}{3}(e^{-2t} - e^{-5t}) & = & \frac{2\alpha+\beta}{3}e^{-2t} + \frac{\alpha-\beta}{3}e^{-5t} & = & \lambda e^{-2t} + \mu e^{-5t} \\ y & = & \frac{\alpha}{3}(2e^{-t} - 2e^{-5t}) + \frac{\beta}{3}(e^{-2t} + 2e^{-5t}) & = & \frac{2\alpha+\beta}{3}e^{-2t} - 2\frac{\alpha-\beta}{3}e^{-5t} & = & \lambda e^{-2t} - 2\mu e^{-5t} \end{array}\right.$$

en posant $\lambda = \frac{2\alpha+\beta}{3}$ et $\mu = \frac{\alpha-\beta}{3}$.

b/ Si $r(t) = 0$, le système complet est $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -3x + y + 1 \\ y' & = & 2x - 4y \end{array}\right.$. On sait qu'il existe alors en général une solution particulière constante $x = x_0, y = y_0$ qui doit satisfaire à : $\left\{\begin{array}{lcl} -3x_0 + y + 1 & = & 0 \\ 2x_0 - 4y_0 & = & 0 \end{array}\right.$, soit $x_0 = \frac{2}{5}, y_0 = \frac{1}{5}$. On en déduit la solution générale du système complet :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{5} + \lambda e^{-2t} + \mu e^{-5t} \\ y & = & \frac{1}{5} + \lambda e^{-2t} - 2\mu e^{-5t} \end{array}\right.$$

Le point fixe $(x_0 = \frac{2}{5}, y_0 = \frac{1}{5})$ est un nœud stable car les valeurs propres du système : -2 et -5 sont strictement négatives.

La solution du système complet de conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 2$ est déterminée par le système linéaire : $\left\{\begin{array}{lcl} \frac{2}{5} + \lambda + \mu & = & 1 \\ \frac{1}{5} + \lambda - 2\mu & = & 2 \end{array}\right.$, d'où $\lambda = 1, \mu = -\frac{2}{5}$, soit : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{5} + e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-5t} \\ y & = & \frac{1}{5} + e^{-2t} + \frac{4}{5}e^{-5t} \end{array}\right.$

c/ Si $r(t) = e^{-t}$, le système complet est un cas particulier de système de la forme : $X' = AX + e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} + e^{\mu t}\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix}$, où ni λ ni μ ne sont valeurs propres de A, avec ici $\lambda = 0$ et $\mu = -1$. Montrons qu'il est alors légitime de chercher une solution particulière de la forme $e^{\lambda t}\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix} + e^{\mu t}\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}$:

Tout d'abord, il est immédiat de voir que si Y_1 est solution de $X' = AX + e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ et Y_2 est solution de $X' = AX + e^{\mu t}\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix}$, alors $Y = Y_1 + Y_2$ est solution de $X' = AX + e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} + e^{\mu t}\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix}$. D'autre part, si λ n'est pas valeur propre de A, alors l'équation $X' = AX + e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ admet une solution particulière $Y = e^{\lambda t}\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}$ car $Y' - AY = \lambda e^{\lambda t}\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix} - Ae^{\lambda t}\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix} = e^{\lambda t}(\lambda I - A)\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}$ doit être égal au second membre $e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$, d'où l'équation aux inconnues a et c : $(\lambda I - A)\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ qui admet, puisque λ n'est pas valeur propre de A, la solution unique $\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix} = (\lambda I - A)^{-1}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ (Noter qu'il existe un résultat analogue plus général, lorsque α et β sont remplacés par des polynômes en t, et que λ est autorisée à être valeur propre de A.)

Les calculs d'identification de a, b, c, d pour trouver une solution $x = a + be^{-t}$, $y = c + de^{-t}$ conduisent au système : $\begin{cases} -be^{-t} &= -3a - 3be^{-t} + c + de^{-t} + 1 \\ -de^{-t} &= 2a + 2be^{-t} - 4c - 4de^{-t} + e{-}t \end{cases}$ d'où (en faisant $t \longrightarrow +\infty$) : $\begin{cases} -3a + \ \ c + 1 &= 0 \\ 2a - 4c &= 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} -b &= -3b + \ \ d \\ -d &= 2b - 4d + 1 \end{cases}$, d'où $a = \dfrac{2}{5}$, $c = \dfrac{1}{5}$, $b = \dfrac{1}{4}$, $d = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne la solution particulière $x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4}e^{-t}$, $y = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}e^{-t}$, et la solution générale du système complet :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4}e^{-t} + \lambda e^{-2t} + \mu e^{-5t} \\[2ex] y &= \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}e^{-t} + \lambda e^{-2t} - 2\mu e^{-5t} \end{cases}$$

La solution du système complet de conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 2$ est déterminée par le système linéaire : $\begin{cases} \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4} + \lambda + \mu &= 1 \\[2ex] \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} + \lambda - 2\mu &= 2 \end{cases}$ d'où : $\lambda = \dfrac{2}{3}$, $\mu = -\dfrac{19}{60}$, soit :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{-2t} + -\dfrac{19}{60}e^{-5t} \\[2ex] y &= \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{-2t} + \dfrac{19}{30}e^{-5t} \end{cases}$$

d/ On voit sur l'expression de la solution générale que dans tous les cas ($r(t) = 0$ ou $r(t) = e^{-t}$), $(x(t), y(t)) \longrightarrow \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Dans le cas $r(t) = e^{-t}$, il n'y a pas de point fixe ; mais dans le cas $r(t) = 0$, le point $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ et à la fois point fixe et point limite (pour $t \longrightarrow +\infty$) de toute trajectoire du système.

2. On a : $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' = -te^{-\frac{t^2}{2}}$ et $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)'' = (-1+t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$, d'où :
$\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)'' + t\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' + e^{-\frac{t^2}{2}} = (-1+t^2-t^2+1)e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, donc $e^{-\frac{t^2}{2}}$ est bien solution particulière de l'équation $y''+ty'+y=0$. Cherchons donc comme indiqué dans le texte la solution générale sous la forme $y = ze^{-\frac{t^2}{2}}$ (N.B. : comme cette équation est homogène, il est clair que tout multiple de $e^{-\frac{t^2}{2}}$ par une constante sera aussi solution ; mais qu'en est-il si le facteur z n'est plus constant ? ...) : $y' = z'e^{-\frac{t^2}{2}} - tze^{-\frac{t^2}{2}}$ (d'où $ty' = tz'e^{-\frac{t^2}{2}} - t^2ze^{-\frac{t^2}{2}}$) et $y'' = z''e^{-\frac{t^2}{2}} - 2tz'e^{-\frac{t^2}{2}} + z(-1+t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$, d'où enfin : $y''+ty'+y = \left[z''-tz'+z(-1+t^2-t^2+1)\right]e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$. La dérivée z' de z est donc solution de l'équation linéaire en Z : $Z'-tZ=0$, soit $\frac{Z'}{Z} = t$, qui s'intègre en $\ln\frac{Z}{\lambda} = \frac{t^2}{2}$, i.e. $Z = z' = \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, qui s'intègre à son tour en $z = \lambda\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}}du + \mu$, d'où $y = ze^{-\frac{t^2}{2}} = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}}du + \mu e^{-\frac{t^2}{2}}$ (solution générale de l'équation).

Si y satisfait aux conditions initiales $y(0)=-1$, $y'(0)=1$: $y(0) = -1 = 0+\mu$, d'où $\mu=-1$, et comme $y' = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}} - \lambda te^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}}du - t\mu e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y'(0) = 1 = \lambda+0$, d'où $\lambda = 1$, soit $y = e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}}du - e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}\left[\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}}du - 1\right]$

3. Pour que $-t$ et $\frac{1}{t}$ soient solutions particulières, on doit avoir : $\left\{\begin{array}{rcl} -1 & = & -t^2 - ta(t) + b(t) \\ -\frac{1}{t^2} & = & -\frac{1}{t^2} + \frac{a(t)}{t} + b(t) \end{array}\right.$,
d'où $b(t) = -\frac{a(t)}{t}$ et $a(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$, $b(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. L'équation de Riccati proposée est donc :

$y' = -y^2 + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}y + \frac{t^2-1}{t^2+1}$; elle est satisfaite par $-t$:
$(-t)' = -(-t)^2 + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}(-t) + \frac{t^2-1}{t^2+1}$, d'où, si $z = y+t$, en soustrayant membre à membre :

$z' = (y+t)' = t^2 - y^2 + (y+y)\frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = -(y+t)(y+t-2t) + (y+t)\frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = -z^2 + 2tz + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}z$, soit $z' = -z^2 + \frac{t^3+3t}{1+t^2}z$, équation de Bernoulli, qui se transforme en divisant par z^2 et en posant $u = \frac{1}{z}$ en l'équation linéaire: $u' = 1 - \frac{t^3+3t}{1+t^2}u$. La solution de l'équation homogène $\frac{u'}{u} = -t - \frac{2t}{1+t^2}$ est : $\ln\frac{u}{\mu} = -\frac{t^2}{2} - \ln(1+t^2)$, i.e. $u = \mu\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2}$; en faisant varier la constante μ : $u' = \mu'\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2} + \mu\frac{-t^3-3t}{(1+t^2)^2}e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $u' + \frac{t^3+3t}{1+t^2}u = 1$ devient $\mu'\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2} = 1$, soit $\mu' = (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}} = (te^{\frac{t^2}{2}})'$, d'où $\mu = te^{\frac{t^2}{2}} + \lambda$, et $u = \frac{te^{\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2}$, soit $z = \frac{1}{u} = \frac{1+t^2}{t+\lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}$ et finalement $y = z - t = \frac{1-\lambda te^{-\frac{t^2}{2}}}{t+\lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}$.

Si $y(0) = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$, i.e. $y = \frac{1-2te^{-\frac{t^2}{2}}}{t+2e^{-\frac{t^2}{2}}}$. On vérifie enfin que pour $\lambda = 0$, on retrouve la solution particulière $y = \frac{1}{t}$ et que pour $\lambda \longrightarrow +\infty$, on retrouve la solution $y = -t$.

4. a/ On vérifie immédiatement que $(e^{-t})' = -e^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$ et, de même, que $(e^{-t})' = -e^{-t} = -e^{-t} - te^{-t} + te^{-t}$, donc que $(x,y) = (e^{-t}, e^{-t})$ est bien une solution particulière du système. Reste à trouver la solution générale du système homogène associé.

b/ Le système homogène associé est : $\overrightarrow{X}' = \begin{bmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{bmatrix} \overrightarrow{X}$. On admettra ici (voir par exemple le chap. VII, §4, du livre de Christol-Cot-Marle : “Calcul différentiel”, Ellipses, Paris, 1997) que lorsque $\forall s, \forall t, A(s)A(t) = A(t)A(s)$, alors l'application $t \mapsto R(t) = e^{\int_0^t A(u)du}$ a pour dérivée $t \mapsto A(t)e^{\int_0^t A(u)du}$ et que l'application R est donc la *résolvante* de l'équation $\overrightarrow{X}' = A(t)\overrightarrow{X}$, i.e. l'application qui est telle que la solution générale de cette équation est $\overrightarrow{X(t)} = R(t)\overrightarrow{X_0}$ (NB : ce n'est pas vrai en général si $A(s)$ et $A(t)$ ne commutent pas ; on s'est limité dans le cours à ce cas simple). Vérifions donc ici que $A(s) = \begin{bmatrix} -s & -1 \\ -1 & -s \end{bmatrix}$ et $A(t) = \begin{bmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{bmatrix}$ commutent : $A(s)A(t) = \begin{bmatrix} st+1 & s+t \\ s+t & st+1 \end{bmatrix}$, expression manifestement symétrique en s et t, donc $A(s)$ et $A(t)$ commutent. Calculons donc cette résolvante, i.e. calculons l'exponentielle de la matrice $\int_0^t \begin{bmatrix} -u & -1 \\ -1 & -u \end{bmatrix} du = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & -t \\ -t & -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = -\frac{t^2}{2}I - tJ$, si $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Comme I commute avec toute matrice (2,2), $-\frac{t^2}{2}I$ commute avec $-tJ$, et $R(t) = e^{-\frac{t^2}{2}I - tJ} = e^{-\frac{t^2}{2}I}.e^{-tJ} = e^{-\frac{t^2}{2}}.e^{-tJ}$ (on rappelle que a/ dès que $AB = BA$, $e^{A+B} = e^A.e^B$ et que b/ $e^{\lambda I} = e^{\lambda}.I$). Il reste donc à calculer e^{-tJ}, ce qui peut se faire soit directement par développement en série, soit par diagonalisation de J. Choisissons la première méthode : comme $J^2 = I, \forall k, J^{2k} = I$ et $\forall k, J^{2k+1} = J$; donc :
$e^{-tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} J^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!} J^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k+1}}{(2k+1)!} J^{2k+1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right] I - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] J = \mathrm{ch}t I - \mathrm{sh}t J = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}t & -\mathrm{sh}t \\ -\mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{bmatrix}$, et $R(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{ch}t & -\mathrm{sh}t \\ -\mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{bmatrix}$.

c/ Il en résulte que la solution générale du système homogène est :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{ch}t & -\mathrm{sh}t \\ -\mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t^2}{2}}(\alpha \mathrm{ch}t - \beta \mathrm{sh}t) \\ e^{-\frac{t^2}{2}}(\beta \mathrm{ch}t - \alpha \mathrm{sh}t) \end{bmatrix}$$

et la solution générale du système complet est :

$$\begin{cases} x = e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(\alpha \mathrm{ch}t - \beta \mathrm{sh}t) \\ y = e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(\beta \mathrm{ch}t - \alpha \mathrm{sh}t) \end{cases}$$

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, toutes les trajectoires convergent vers l'origine ; et lorsque $t \longrightarrow -\infty$, x et y, équivalents à e^{-t}, vont en $+\infty$, avec $\frac{y}{x} \longrightarrow 1$ et $y - x = e^{-\frac{t^2}{2}}(-\alpha e^t - \beta e^{-t}) \longrightarrow 0$, donc la première bissectrice est asymptote aux trajectoires pour $t \longrightarrow -\infty$.

d/ Les conditions initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = 4$ donnent $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, soit :
$x = e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(\mathrm{ch}t - 3\mathrm{sh}t)$ et $y = e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(3\mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t)$.