UNIVERSITÉ PARIS VIII **SYSTÈMES DYNAMIQUES**
Licence / maîtrise de mathématiques **2002-2003**
Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen final (2e session) du 16 septembre 2003 (suivi de son corrigé)

1. (4 points) On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & k(x+y)-(x^2+y^2)x \\ y' & = & k(-x+y)-(x^2+y^2)y \end{array}\right. \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

a/ Intégrer le système lorsque $k = 0$ en passant en coordonnées polaires (calculer $xx' + yy'$ d'une part et $\dfrac{xy' - x'y}{x^2}$ d'autre part) et montrer que l'origine est dans ce cas un point fixe stable.
b/ On suppose désormais $k \neq 0$. Passer en coordonnées polaires et montrer que lorsque $k < 0$ l'origine est un point fixe stable et que lorsque $k > 0$ l'origine est un point fixe instable et le cercle d'équation $x^2 + y^2 = k$ un cycle limite stable ; quel est dans ce dernier cas le sens du parcours sur le cycle limite ?

2. (4 points) On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x-2y \\ y' & = & -x-y+x^3 \end{array}\right.$$

Calculer et représenter graphiquement les nullclines et les points stationnaires de ce système. Vérifier qu'ils sont tous hyperboliques et déterminer leur nature en précisant chaque fois que cela a un sens les sous-espaces stable et instable du système linéarisé tangent. Préciser le sens de parcours (en temps positif) des trajectoires au voisinage des foyers et esquisser un portrait de phase (classer pour cela les régions du plan suivant les signes de x' et de y').

3. (6 points) On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-y-x^3 \\ y' & = & x+y-y^3 \end{array}\right.$$

a/ Représenter sur un même graphique les deux nullclines $y = x - x^3$ et $-x = y - y^3$ et montrer que ce système n'admet pas d'autre point fixe que l'origine. (On pourra raisonner ainsi : par invariance de la figure par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, il suffit de montrer que le système $y = x(1-x^2), -x = y(1-y^2)$ n'a pas pas d'autre solution que la solution évidente $(0,0)$ dans le premier quadrant $x \geq 0, y \geq 0$; montrer que pour des raisons de signes on doit avoir $1 - x^2 > 0$, i.e. $|x| < 1$ et $1 - y^2 < 0$, i.e. $|y| > 1$; vérifier qu'alors on devrait avoir $0 < x(1-x^2) < 1$ et $y > 1$, ce qui est incompatible avec l'équation de la première nullcline.)
b/ Déterminer la nature du point fixe (et sa stabilité) ainsi que le sens de parcours des trajectoires à son voisinage.
c/ Montrer que la couronne $\{1 < x^2+y^2 < 2\}$ est une région de confinement pour le flot (on montrera que le vecteur tangent à toute trajectoire fait aux bords de cette région un angle obtus avec le vecteur normal unitaire sortant, i.e. que le champ est toujours *rentrant* dans cette région du plan). En déduire, à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson, que le système admet une orbite périodique.

T. S. V. P.

4. (8 points) On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y(1+x^2+y^2) \\ y' & = & x(1-x^2-y^2) \end{array}\right.$$

a/ Montrer que ce système est hamiltonien, de hamiltonien $H(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{4} - \dfrac{x^2-y^2}{2}$.

b/ Vérifier que $\dfrac{dH}{dt} = 0$ le long des trajectoires solutions et en déduire que les courbes intégrales (i.e. les trajectoires solutions) du système sont de la forme $H(x,y) = \dfrac{C}{4}$, où C est une constante.

c/ Déterminer les points fixes du système et étudier leur stabilité. N.B. : les points fixes $(1,0)$ et $(-1,0)$ ne sont pas hyperboliques, et on ne peut donc leur appliquer le théorème de Hartman-Grobman. On fera, par exemple pour $(1,0)$, le changement de variable $(X = x-1,\ Y = y)$ dans l'équation $H(x,y) = \dfrac{C}{4}$ et on pourra montrer que cette équation s'écrit : $\left(X + \dfrac{X^2+Y^2}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\right)^2$ pour tout $C > -1$, équation très voisine de celle d'un cercle pour (X,Y) proche de $(0,0)$ (N. B. : en effet X^2+Y^2 est alors négligeable devant X et Y). On pourra paramétrer alors cette équation ainsi : $X + \dfrac{X^2+Y^2}{2} = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\cos\varphi$, $Y = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sin\varphi$ pour montrer qu'alors, pourvu que $-1 < C < 0$, (X,Y) s'exprime comme une fonction périodique de la variable φ, plus précisément : $x = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sqrt{\left(\cos\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1}$, $y = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sin\varphi$ (revenant en (x,y)). Et de même au voisinage de $(-1,0)$ (symétrie par rapport à $0y$) : $x = -\dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sqrt{\left(\cos\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1}$, $y = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sin\varphi$. On en déduira que les points fixes $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont entourés par une famille continue d'orbites périodiques (pour $-1 < C < 0$) et sont donc des centres.

UNIVERSITÉ PARIS VIII **SYSTÈMES DYNAMIQUES**
Licence / maîtrise de mathématiques **2002-2003**
Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Corrigé de l'examen final (2e session) du 16 septembre 2003

1. a/ Pour $k = 0$, on calcule comme indiqué dans le texte :
$rr' = xx' + yy' = -x^2(x^2+y^2) - y^2(x^2+y^2) = -r^4$ et $(1+\tan^2\theta)\theta' = \dfrac{x'y - xy'}{x^2} = 0$, soit :
$-2\dfrac{r'}{r^3} = 2$ et $\theta = \theta_0$, ou encore : $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{r_0^2} + 2t$ et $\theta = \theta_0$, soit $r = \dfrac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2 t}}$ et $\theta = \theta_0$.
c'est-à-dire : $x = \dfrac{r_0\cos\theta_0}{\sqrt{1+2r_0^2 t}}$, $y = \dfrac{r_0\sin\theta_0}{\sqrt{1+2r_0^2 t}}$. Le segment $0 \leq r \leq r_0$, $\theta = \theta_0$ est l'unique trajectoire et l'origine est un point fixe stable puisque $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ pour $t \longrightarrow +\infty$, quels que soient r_0 et θ_0.

b/ Pour $k \neq 0$, on calcule de même :
$rr' = xx' + yy' = r^2(k - r^2)$ et $(1+\tan^2\theta)\theta' = \dfrac{x'y - xy'}{x^2} = \dfrac{-kx^2 - ky^2}{x^2} = -k(1+\tan^2\theta)$, soit :
$-2\dfrac{r'}{r^3} = \dfrac{-2k}{r^2} + 2$ et $\theta' = -k$, soit encore, en posant $z = \dfrac{1}{r^2}$, $z' = -2kz + 2$ et $\theta = \theta_0 - kt$, d'où par variation de la constante : $z = \dfrac{1}{k} - \left(z_0 + \dfrac{1}{k}\right)e^{-2kt}$, $\theta = \theta_0 - kt$, et finalement :

$$r = \sqrt{\frac{k}{1 + \left(\dfrac{k}{r_0^2} - 1\right)e^{-2kt}}},\ \theta = \theta_0 - kt$$

Si $k < 0$, l'équation en r : $r' = r(k - r^2)$ n'admet que l'origine pour point fixe, point fixe qui est stable puisqu'au voisinage de 0, $r' \approx kr$ avec $k < 0$, et bien sûr sur l'expression du flot (défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, comme le montre un calcul simple) on voit que pour $t \longrightarrow +\infty$, $r \longrightarrow 0$.
Mais si $k > 0$, l'équation en r admet alors deux points fixes : 0, avec $\left.\dfrac{dr'}{dr}\right|_{r=0} = k > 0$, donc point fixe instable, et $\sqrt{k}$, avec $\left.\dfrac{dr'}{dr}\right|_{r=\sqrt{k}} = \left.(k - 3r^2)\right|_{r=\sqrt{k}} = -2k < 0$, donc point fixe stable. Sur l'expression du flot (défini aussi sur $\mathbb{R}$ tout entier), on voit que $r \longrightarrow \sqrt{k}$ pour $t \longrightarrow +\infty$ et $r \longrightarrow 0$ pour $t \longrightarrow -\infty$. Comme pour $r_0 = \sqrt{k}$, on a $r = \sqrt{k}$ pour tout t, avec $\theta = -kt$, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = k$ est une trajectoire fermée qui est un cycle limite stable (et l'origine un point fixe instable). Le sens de parcours sur le cycle limite est le sens des aiguiles d'une montre ($\theta' = -k$, avec $k > 0$).

2. Les nullclines sont la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{2}$ et la cubique d'équation $y = x(1 - x^2)$, dont les points d'intersection, points stationnaires du système, sont les points $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. La matrice jacobienne du système s'écrit : $J_{(x,y)}F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1+3x^2 & -1 \end{bmatrix}$.

- En $(0,0)$, $J_{(0,0)}F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $-1 \pm \sqrt{2}$, donc l'origine est un point-selle du linéarisé tangent comme du système non linéaire (d'après le théorème de Hartman-Grobman) ; direction stable : $Ker\left(J_{(0,0)}F + \left(1+\sqrt{2}\right) I\right) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$; direction instable : $Ker\left(J_{(0,0)}F + \left(1-\sqrt{2}\right) I\right) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.
- En $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $J_{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $(-1 \pm i)$: ces deux points fixes sont des foyers stables du linéarisé tangent, donc du système non linéaire lui-même. Le calcul du flot du linéarisé tangent en chacun de ces points conduit (par une diagonalisation dans $\mathbb{C}$) à : $e^{tJ} = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -2\sin t \\ \frac{1}{2}\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, d'où par exemple le sinus de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, e^{tJ}\overrightarrow{i}\right)$ égal à $\frac{1}{2}e^{-t}\sin t$, donc positif en temps positif pour t petit : les trajectoires s'enroulent autour des foyers dans le sens positif ; on peut aussi retrouver ce résultat en esquissant le portrait de phase au voisinage des foyers, qui montre un vecteur tangent faisant toujours un angle aigu avec le vecteur $(\cos t, \sin t)$ qui oriente le cercle unité dans le sens positif.

3. a/ Le tracé des deux nullclines fait apparaître une invariance de la figure par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: en effet les nullclines sont toutes deux symétriques par rapport à l'origine (comme graphes de fonctions impaires : $x \mapsto y = x(1-x^2)$ et $y \mapsto -x = y(1-y^2)$, et la deuxième se déduit de la première par la rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{2}$: $(x,y) \mapsto (y,-x)$. L'origine est à l'évidence un point fixe du système. Pour démontrer qu'il n'y en a pas d'autre (ce qu'on constate sur le graphe), procédons comme indiqué dans le texte et plaçons-nous dans le premier quadrant $(x \geq 0,\ y \geq 0)$:
s'il existe un autre point fixe, soit (x,y) avec $x \geq 0,\ y \geq 0$, d'abord $x \neq 0$ (sinon $y = 0$) et $y \neq 0$ (sinon $x = 0$), d'où $x > 0,\ y > 0$. Mais $y = x(1-x^2)$ avec $x > 0$ et $y > 0$ implique que $1 - x^2 > 0$, i.e. que $0 < x < 1$, d'où $0 < x(1-x^2) < 1$; de même $-x = y(1-y^2)$ avec $x > 0$ et $y > 0$ implique que $1 - y^2 < 0$, i.e. que $y > 1$, ce qui est incompatible avec $0 < x(1-x^2) < 1$ et $y = x(1-x^2)$: il n'y a donc aucun autre point fixe que l'origine dans le premier quadrant $x \geq 0,\ y \geq 0$ ni, par invariance de la figure par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, plus généralement dans le plan tout entier.

b/ La matrice jacobienne du système à l'origine est $J_{(0,0)}F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, de valeurs propres $-1 \pm i$, donc l'origine est pour le système linéarisé tangent comme pour le système non linéaire un foyer stable. Et comme cette jacobienne s'écrit aussi $\sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$ (matrice de l'homothétie positive de centre l'origine, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, le sens de parcours sur les trajectoires qui s'enroulent autour de l'origine est le sens positif.

c/ Le vecteur tangent aux trajectoires est le vecteur $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y - x^3 \\ x + y - y^3 \end{bmatrix}$. Le vecteur normal unitaire sortant de la couronne est le vecteur $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ pour son bord intérieur (le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$) et le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pour son bord extérieur (le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$). Sur le bord intérieur, le produit scalaire du vecteur tangent à toute trajectoire avec le vecteur normal unitaire sortant est donc $-x^2 - y^2 + x^4 + y^4 = -x^2 - y^2 + (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = -2x^2y^2 \leq 0$, et leur angle est donc toujours obtus (au sens large, i.e. jamais aigu). Sur le bord extérieur, le produit scalaire du vecteur tangent à toute trajectoire avec le vecteur normal unitaire sortant est de même $-x^2x^2+y^2-x^4-y^4 = x^2+y^2-(x^2+y^2)^2+2x^2y^2 = 2-4+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta \leq -\frac{3}{2} < 0$, et leur angle est donc toujours obtus (au sens large, i.e. jamais aigu). Il en résulte que le champ est toujours rentrant dans la couronne. Comme elle ne contient aucun point stationnaire, c'est donc, d'après le théorème de Poincaré-Bendixson, qu'elle contient une trajectoire fermée, c'est-à-dire une orbite périodique.

4. a/ On vérifie immédiatement que $\frac{\partial H}{\partial x} = x(x^2+y^2) - x = -y'$ et que $\frac{\partial H}{\partial y} = y(x^2+y^2) + y = x'$: le système est bien hamiltonien de hamiltonien H.

b/ On vérifie dans ce cas particulier cette propriété des systèmes hamiltoniens : le long d'une trajectoire solution, on a $\frac{dH}{dt} =< \overrightarrow{\nabla H}, \overrightarrow{x}' >= y(1+x^2+y^2).x(x^2+y^2-1)+x(1-x^2-y^2).y(x^2+y^2+1) = xy\left((x^2+y^2)^2-1\right) + xy\left(1-(x^2+y^2)^2\right) = 0$. Les courbes intégrales, ou trajectoires, du système sont donc de la forme annoncée, i.e. $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = C$.

c/ Les points fixes du système sont les points d'intersection des nullclines, $y = 0$, $x(1-x)(1+x)=0$, soit les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$. L'origine est un point-selle du linéarisé tangent, puisque $J_{(0,0)}F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres -1 et 1, donc aussi du système non linéaire. Mais comme le mentionne le texte, les points fixes $(\pm 1, 0)$ ne sont pas hyperboliques (en effet un calcul rapide montre que $J_{(\pm 1,0)}F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $\pm 2i$) et on ne peut donc leur appliquer le théorème de Hartman-Grobman, il faut calculer "à la main".
On vérifie sans peine que, au voisinage de $(1,0)$, l'équation $H(x,y) = \frac{C}{4}$ s'écrit avec le changement de variable $X = x-1$, $Y = y$ sous la forme $\left(X + \frac{X^2+Y^2}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{\sqrt{1+C}}{2}\right)^2$, comme indiqué. Partant alors pour $-1 < C < 0$ de la paramétrisation du cercle de rayon $\frac{\sqrt{1+C}}{2}$ par cosinus et sinus, c'est-à-dire des égalités $X + \frac{X^2+Y^2}{2} = \frac{\sqrt{1+C}}{2}\cos\varphi$, $Y = \frac{\sqrt{1+C}}{2}\sin\varphi$, on écrit en remplaçant Y par sa valeur en fonction de φ dans la première équation :

$$2X+X^2+\frac{1+C}{4}(1-\cos^2\varphi)-\sqrt{1+C}\cos\varphi=(X+1)^2-1+\frac{1+C}{4}-\left(\frac{\sqrt{1+C}}{2}\cos\varphi+1\right)^2+1=0,$$

soit encore en revenant en (x,y) : $x^2 = \left(\frac{\sqrt{1+C}}{2}\right)^2\left(\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1\right)$, d'où :

$x = \left(\frac{\sqrt{1+C}}{2}\right)\sqrt{\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1}$, expression qui a bien un sens puisque

$-1 < C < 0 \Longrightarrow 2 < \dfrac{2}{\sqrt{1+C}} \Longrightarrow \left(\cos\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1 \geq 0$, avec le bon choix du signe (+) devant la racine puisque $x > 0$ au voisinage de $(1,0)$.

On aurait de même $x = -\left(\dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\cos\varphi\right)\sqrt{\left(\cos\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1}$ au voisinage de $(-1,0)$.

et donc les expressions : $x = \left(\dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\cos\varphi\right)\sqrt{\left(\cos\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1}$, $y = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sin\varphi$ au voisinage de $(1,0)$ et $x = -\left(\dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\cos\varphi\right)\sqrt{\left(\cos\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{1+C}}\right)^2 - 1}$, $y = \dfrac{\sqrt{1+C}}{2}\sin\varphi$ au voisinage de $(-1,0)$, expressions de paramétrisations périodiques de période 2π des trajectoires solutions au voisinage des points fixes $(\pm 1,0)$, qui montrent que ces trajectoires forment une famille continue (pour $-1 < C < 0$) d'orbites périodiques. Il en résulte bien que les deux points fixes $(\pm 1,0)$ sont des centres du système non linéaire.

N. B. : ces exercices sont librement inspirés, ou directement tirés, des livres de L. Perko : *Differential equations and dynamical systems* (Ed. Springer) et S. Strogatz : *Nonlinear dynamics and chaos* (Ed. Addison Wesley), dont la lecture est vivement conseillée aux étudiants.