Examen partiel du 16 décembre 1999

1. (4 points) En notant $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine, et, pour toute personne x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j, écrire avec des symboles mathématiques adaptés ($\forall$, $\exists$, $\in$, etc.) la proposition : "Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8 h." Prendre avec les mêmes symboles la négation de cette proposition et l'énoncer en français.

2. (4 points) a/ x étant un réel positif et n un entier naturel non nul, démontrer par récurrence sur n que : $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{1}{2}(n-1)^2x^2$; b/ Démontrer cette inégalité à l'aide de de la formule du binôme.

3. (4 points) Soit l'ensemble $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (ensemble de tous les restes possibles dans la division euclidienne par 5), muni des opérations de composition interne † et $\star$ ainsi définies :

$$x \dagger y = \text{le reste dans la division euclidienne de } x + y \text{ par } 5$$
$$x \star y = \text{le reste dans la division euclidienne de } x \times y \text{ par } 5$$

Dresser les tables des lois † dans $\mathbb{F}_5$ et $\star$ dans $\mathbb{F}_5^* = \mathbb{F}_5 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$. En admettant que ces deux lois sont associatives et la deuxième distributive sur la première (N.B. : cela résulte de l'associativité de $+$ et $\times$ et de la distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{N}$, mais on ne demande pas ici de le démontrer), vérifier sur ces tables que $(\mathbb{F}_5, \dagger, \star)$ est un corps commutatif.

4. (4 points) Soient les nombres complexes $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = 2 + 2i$. Mettre sous forme exponentielle (=trigonométrique) les nombres : u, v, $\dfrac{u}{v}$ et uv. Donner $\dfrac{u}{v}$ et uv sous forme algébrique et en déduire l'expression à l'aide de racines carrées de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$, et de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

5. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en z : $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$

6. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en z : $z^2 - z + 1 = 0$ (on exprimera les solutions à l'aide des racines cubiques de l'unité $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$). Utiliser les racines trouvées pour déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme $P = (X^{99} - X^{50} + X^{18} + X^4 + X^2 + 1)^{1999}$ par $X^2 - X + 1$.

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 1999

1. La proposition peut s'écrire ainsi : $\forall x \in \mathcal{E},\ \exists j \in \mathcal{S}\ /\ h_j(x) < 8$.
Sa négation s'en déduit immédiatement, c'est : $\exists x \in \mathcal{E} / \ \forall j \in \mathcal{S},\ h_j(x) \geq 8$. Ce qui peut s'énoncer ainsi en français : "Il existe au moins un étudiant qui, quel que soit le jour de la semaine, ne se réveille jamais avant 8 h."

2. a/ Par récurrence sur n : (1. initialisation à $n = 1$:) pour $n = 1$, la proposition à démontrer s'écrit : $1 + x \geq 1 + x$, ce qui est vrai ; (2. incrémentation de n à $n + 1$:) si la proposition est vraie au rang n, i.e. si $(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{1}{2}(n - 1)^2 x^2$, alors :
$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)\left(1 + nx + \frac{1}{2}(n-1)^2x^2\right) = 1 + nx + \frac{1}{2}(n-1)^2x^2 + x + nx^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2x^3 = 1 + (n+1)x + nx^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2x^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2x^3$;
mais $nx^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2x^2 = \frac{1}{2}n^2x^2 + \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}n^2x^2$, et $\frac{1}{2}(n-1)^2x^3 \geq 0$, donc :
$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + \frac{1}{2}n^2x^2$, i.e. la proposition est vraie aussi au rang $n + 1$; donc elle est vraie pour tout $n \geq 1$.
b/ plus directement, la formule du binôme s'écrit ici :
$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 +$ [une quantité positive] $\geq 1 + nx + \frac{1}{2}(n-1)^2x^2$, d'où le résultat.

3. Les tables demandées s'écrivent ainsi :

†	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

et

$\star$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

On constate sur ces tables, si l'on admet l'associativité des lois † et $\star$ dans $\mathbb{F}_5$, que ($\mathbb{F}_5$, †) est un groupe commutatif (symétrie par rapport à la diagonale) d'élément neutre 0, puisque tout élément a un opposé : $0 \dagger 0 = 0$, $1 \dagger 4 = 0$, $2 \dagger 3 = 0$, et que ($\mathbb{F}_5^*$, $\star$) est également un groupe commutatif (d'élément neutre 1), puisque tout élément non nul a un inverse : $1 \star 1 = 1$, $2 \star 3 = 1$, $4 \star 4 = 1$. Il resterait donc encore à vérifier (on l'admet) que la loi $\star$ est distributive sur † pour obtenir que $\mathbb{F}_5$ est bien un anneau dans lequel tout élément non nul a un inverse pour $\star$, c'est-à-dire un corps, qui est d'ailleurs commutatif.

(Si l'on ne veut pas se contenter d'"admettre", démontrons par exemple l'associativité de † : soient t et $u \in \mathbb{F}_5$ tels que $x \dagger y = t$ et $t \dagger z = u$, d'une part, et v et $w \in \mathbb{F}_5$ tels que $y \dagger z = v$ et $x \dagger v = u$, d'autre part. Il faut, pour démontrer l'associativité de †, vérifier que $u = w$. Or on a : $x + y = 5k + t$ et $t + z = 5l + u$, pour un certain k et un certain l entiers, d'où : $x + y + z = 5(k + l) + u$; et de même : $y + z = 5m + v$ et $x + v = 5n + w$, pour un certain m et un certain n entiers, d'où : $x + y + z = 5(m + n) + w$. L'unicité du reste dans la division euclidienne de $x + y + z$ par 5 implique que $u = w$, ce qu'il fallait démontrer. On obtiendrait de même l'associativité de $\star$ et la distributivité de $\star$ sur † dans $\mathbb{F}_5$ à partir des mêmes propriétés pour $+$ et $\times$ dans $\mathbb{N}$.)

4. On a : $u = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $v = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, d'où $\dfrac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$ et $uv = 4\sqrt{2}e^{i\pi(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} = 4\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$.
Comme $\dfrac{u}{v} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2+2i} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(2-2i)}{8} = \dfrac{2+2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})}{8} = \dfrac{1+\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{4}$
et $uv = 2 - 2\sqrt{3} + i(2+2\sqrt{3})$, on en déduit par identification des parties réelles de $\dfrac{u}{v}$ et uv d'une part, et de leurs parties imaginaires d'autre part, que :
$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, ces deux dernières relations pouvant d'ailleurs s'obtenir à partir des deux premières, puisque $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}$ et que $\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$ et $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$.

5. L'équation a pour discriminant : $\Delta = (3+i)^2 - 4(4+3i) = -8-6i$. Il faut donc calculer les deux racines $a+ib$ de Δ, qui sont déterminées par $(a+ib)^2 = -8-6i$, d'où $a^2 - b^2 = \mathfrak{Re}(\Delta) = -8$, $a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, avec $ab < 0$, soit : $a^2 = 1$ et $b^2 = 9$, avec a et b de signes contraires. On trouve $a+ib = 1-3i$ ou $-1+3i$, d'où les solutions de l'équation en z :
$z_1 = \frac{1}{2}(3+i+1-3i) = 2-i$ et $z_2 = \frac{1}{2}(3+i-1+3i) = 1+2i$.

6. Puisque $j^2+j+1 = 0$ (j et j^2 étant des racines cubiques de l'unité différentes de 1), on a :
$(-j)^2 - (-j) + 1 = j^2+j+1 = 0$ et $(-j^2)^2 - (-j^2) + 1 = j + j^2 + 1 = 0$, i.e. $-j$ et $-j^2$ sont les deux racines de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. Si on calcule alors $P(-j)$ et $P(-j^2)$, on obtient, compte tenu de $j^3 = 1$:
$P(-j) = ((-j)^{99} - (-j)^{50} + (-j)^{18} + (-j)^4 + (-j)^2 + 1)^{1999} = (-1 - j^2 + 1 + j + j^2 + 1)^{1999} = (-j^2)^{1999} = -j^2$
$P(-j^2) = ((-j^2)^{99} - (-j^2)^{50} + (-j^2)^{18} + (-j^2)^4 + (-j^2)^2 + 1)^{1999} = (-1 - j + 1 + j^2 + j + 1)^{1999} = (-j)^{1999} = -j$
Or si la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$ a pour reste $aX+b$ (en effet, X^2+X+1 étant de degré 2, le reste est de degré au plus 1), elle s'écrit : $P = (X^2+X+1)Q + aX + b$, d'où :
$-aj + b = P(-j) = -j^2$
$-aj^2 + b = P(-j^2) = -j$
En faisant la différence, on obtient : $a(j^2 - j) = j - j^2$, soit $a = -1$, et en faisant la somme : $a(-j-j^2) + 2b = -j^2 - j$, soit $a + 2b = 1$, d'où $b = 1$. Le reste cherché est donc $-X+1$.