Examen partiel du 21 décembre 2000

1. (5 points) On rappelle (ou on admettra) que si E et F sont des ensembles finis : a/ s'il existe une injection de E dans F, alors $card(E) \leq card(F)$; b/ s'il existe une surjection de E dans F, alors $card(E) \geq card(F)$ (ici, $card(E)$ est le cardinal, i.e. le nombre d'éléments, de E). Soit alors un ensemble de N individus (l'ensemble des élèves d'une école donnée, l'année de référence n'étant pas précisée) : $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, A l'ensemble des dates possibles d'une année, de 1 à 366, et a l'application qui à tout individu x de E fait correspondre sa date de naissance $a(x)$ dans A.
a/ À quelle condition sur $N = card(E)$ peut-on affirmer que l'application a n'est certainement pas injective ? Même question pour "certainement pas surjective".
b/ On note $p(N)$ la proposition "$N > 366$" et $q(N)$ la proposition "$\exists i \in \{1, \ldots, N\}, \exists j \in \{1, \ldots, N\}$ / $i \neq j$ et $a(x_i) = a(x_j)$". Que doit-on penser de l'implication "$p(N) \Rightarrow q(N)$" ? Est-elle certainement toujours vraie ? toujours fausse ? ou bien l'un ou l'autre suivant la valeur de N ?
c/ Énoncer en français la proposition "$\forall N \in \mathbb{N}, p(N) \Rightarrow q(N)$" (on supposera que l'ensemble E est toujours la population des élèves d'une école bien précise, seule l'année de référence étant susceptible de varier). Expliciter la contraposée de cette implication et l'énoncer en français.

2. (4 points) Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite convexe ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall \alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. Montrer que si f est convexe, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$
Indication : on pourra procéder par récurrence sur n, en passant de n à $n+1$ grâce à l'identité :
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{1}{n+1}x_{n+1}\ .$$

3. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en X : $X^2 - (5+i)X + 8 + 4i = 0$.

4. (6 points) Montrer que l'ensemble des solutions en nombres complexes de l'équation en X : $X^{12} = 1$, muni de la multiplication, a une structure de groupe commutatif. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$, d'abord trigonométriquement, puis algébriquement. Représenter l'ensemble de ses solutions sur le cercle-unité, en faisant apparaître les éléments conjugués deux à deux et en déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, du polynôme $X^{12} - 1$.

5. (5 points) Soit le polynôme $P = X^{2001} + X^{2000} + X^{1999} + X^2 + X + 1$. Quel est le reste dans la division euclidienne de P par $X^4 - 1$?
Indication : soit $aX^3 + bX^2 + cX + d$ ce reste. Écrire l'égalité de division euclidienne de P par $X^4 - 1$ et calculer $P(1)$, $P(-1)$, $P(i)$ et $P(-i)$ à l'aide de la définition de P d'une part, en fonction de a, b, c et d d'autre part ; examiner alors $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}, \dfrac{P(1)-P(-1)}{2}, \dfrac{P(i)+P(-i)}{2}$, *et* $\dfrac{P(i)-P(-i)}{2i}$.

Corrigé de l'examen partiel du 21 décembre 2000

1. a/ En tenant compte des années bissextiles possibles, si $N > 366$, alors a n'est certainement pas injective (voir le rappel) ; de même si $N < 365$, a n'est certainement pas surjective.
b/ La proposition "$p(N) \Rightarrow q(N)$" dit exactement que si E a strictement plus de 366 éléments, alors a ne peut être injective, i.e. s'il y a strictement plus de 366 élèves dans l'école, alors il y a au moins 2 élèves qui fêtent leur anniversaire le même jour, ce qui est vrai : la proposition est toujours vraie.
c/ En français : "Quelle que soit l'année, si le nombre d'élèves de l'école dépasse (strictement) 366, alors il y a au moins 2 élèves qui sont nés le même jour."
Contraposée : "$\forall N \in \mathbb{N}, \{\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \forall j \in \{1, \ldots, N\},\ i \neq j \Rightarrow a(x_i) \neq a(x_j)\} \Rightarrow \{N \leq 366\}$"
Contraposée énoncée en français : "Quelle que soit l'année, si on ne peut trouver aucune paire d'élèves de l'école qui soient nés le même jour, c'est que l'école compte cette année-là au plus 366 élèves." (N.B. : y compris éventuellement un élève né le 29 février !)

2. Pour $n = 1$, la propriété est vraie quelle que soit la fonction f. Pour $n = 2$ (initialisation), la propriété est vraie d'après l'hypothèse de convexité de f, en faisant $x = x_1, y = x_2$, et $\alpha = \frac{1}{2}$.
Supposons (hypothèse de récurrence) la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$. D'après l'hypothèse de convexité, en faisant $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $y = x_{n+1}$, avec $\alpha = \frac{n}{n+1}$, on obtient :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\frac{n}{n+1}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{1}{n+1}x_{n+1}\right)$$
$$\leq \frac{n}{n+1} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}).$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence, $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$ d'où :

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n+1})}{n+1}$$

et l'inégalité est vraie au rang $n+1$ aussi (incrémentation). Elle est donc vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On calcule d'abord le discriminant : $\Delta = (5+i)^2 - 4(8+4i) = 25 + 10i - 1 - 32 - 16i = -8 - 6i$.
Il faut en déterminer les 2 racines carrées, soient $a + ib$ et $-a - ib$, en résolvant l'équation : $(a + ib)^2 = \Delta = -8 - 6i$, soit, en séparant parties réelle et imaginaire : $a^2 - b^2 = -8$ et $2ab = -6$; en rajoutant l'équation $|\Delta| = |(a + ib)^2| = |a + ib|^2$, on obtient : $a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10$, d'où, en combinant cette équation avec la première : $2a^2 = 2$ et $2b^2 = 18$, d'où $a = \pm 1$ et $b = \pm 3$, et en tenant compte de la condition $ab < 0$: $a + ib = 1 - 3i$ ou $-1 + 3i$. On a donc $\Delta = (1 - 3i)^2$, d'où les 2 racines cherchées : $X_1 = \frac{5 + i - 1 + 3i}{2} = 2 + 2i$ et $X_2 = \frac{5 + i + 1 - 3i}{2} = 3 - i$.

4. Soit $\mathbb{U}_{12}$ l'ensemble des solutions en nombres complexes de l'équation en X : $X^{12} = 1$, muni de la multiplication. C'est une partie du groupe multiplicatif commutatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ qui contient l'élément

neutre 1, et qui est telle que pour $a \in \mathbb{U}_{12}$ et $b \in \mathbb{U}_{12}$, $(a^{-1})^{12} = a^{-12} = \dfrac{1}{a^{12}} = 1$, donc $a^{-1} \in \mathbb{U}_{12}$, et $(ab)^{12} = a^{12}b^{12} = 1$, donc $ab \in \mathbb{U}_{12}$. $(\mathbb{U}_{12}, \times)$ est donc un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{C}^*, \times)$: c'est donc bien un groupe commutatif.
Les solutions, qui se représentent sur le cercle-unité aux emplacements des heures sur un cadran d'horloge, sont les racines douzièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire : $\left\{e^{\frac{2\pi ik}{12}}, k = 1, \ldots, 12\right\}$, soit : $1, e^{\frac{\pi i}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ et $e^{\frac{-\pi i}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}, e^{\frac{\pi i}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{\frac{-\pi i}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, i$ et $-i, e^{\frac{2\pi i}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{\frac{-2\pi i}{3}} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, e^{\frac{5\pi i}{6}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ et $e^{\frac{-5\pi i}{6}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}, -1$.
D'où la factorisation de $X^{12} - 1$, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$:
$X^{12} - 1 = (X-1)(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2})(X - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(X - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(X-i)(X+i)\ldots$
$\ldots(X + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(X + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2})(X+1)$
puis dans $\mathbb{R}[X]$:
$X^{12} - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

5. L'égalité de division euclidienne s'écrit : $P = (X^4 - 1)Q + aX^3 + bX^2 + cX + d$ (puisque $X^4 - 1$ est de degré 4, le reste est de degré inférieur ou égal à 3). Les racines de $X^4 - 1$ étant $1, -1, i$ et $-i$, on en déduit, en tenant compte du fait que $P(1) = 6, P(-1) = 0, P(i) = 1 + i$ et $P(-i) = 1 - i$:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} a + b + c + d & = & P(\ \ 1) & = & 6 \\ -a + b - c + d & = & P(-1) & = & 0 \\ -ai - b + ci + d & = & P(\ \ i) & = & 1+i \\ ai - b - ci + d & = & P(-i) & = & 1-i \end{array}\right.$$

On obtient : $b + d = \dfrac{P(1) + P(-1)}{2} = 3$ et $d - b = \dfrac{P(i) + P(-i)}{2} = 1$, d'où $b = 1$, $d = 2$; $a + c = \dfrac{P(1) - P(-1)}{2} = 3$ et $c - a = \dfrac{P(i) - P(-i)}{2i} = 1$, d'où $a = 1, c = 2$, et le reste cherché est $X^3 + X^2 + 2X + 2$.