Examen final du 28 septembre 1999

1. (4 points) Montrer que le polynôme $P = X^3 + 12X - 16i$ a une racine double et factoriser complètement P dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire la résolution de l'équation en $z \in \mathbb{C}$: $z^{3n} + 12z^n - 16i = 0$, où $n \in \mathbb{N}$ (donner les solutions sous forme exponentielle). Combien y a-t-il de solutions distinctes ?

2. (3 points) Quel est le reste dans la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme -qu'on ne cherchera pas à développer- $P = (X^{13}+X^7+X^2+1)^{2000}$ par le polynôme X^2+X+1 ? (On pourra écrire l'égalité de division euclidienne, et calculer $P(j)$ et $P(j^2)$, où j et j^2 sont les racines de X^2+X+1 dans $\mathbb{C}$: on utilisera les relations $j^2+j+1=0$ et $j^3=1$.)

3. (5 points) On définit la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n}{u_n - 3}$.
a/ Déterminer les deux limites possibles α et β de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on choisira $\alpha \leq \beta$).
b/ Soit $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et calculer v_n en fonction de n.
c/ Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

4. (6 points) On rappelle que l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ est une droite, passant par exemple par les points $A(\frac{-c}{a}, 0)$ et $B(0, \frac{-c}{b})$, et que l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ est le cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon r.
Pour tout nombre complexe $z = x+iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) distinct de 1, on pose $Z = \dfrac{z-2i}{z-1}$.
a/ Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan, d'affixe $z = x+iy$, tels que $|Z| = 2$ (commencer par élever au carré cette égalité).
b/ Écrire Z sous forme algébrique ($a+ib$) et en déduire successivement :
- l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan, tels que Z soit réel ;
- l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan, tels que Z soit imaginaire pur.

5. (6 points) Soit la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
a/ Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \leq u_n \leq 5$.
b/ Montrer que les seules limites possibles pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont a priori -1 et 4, mais que le cas -1 est exclu d'après le a/.
c/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 4| \leq \dfrac{|u_n - 4|}{2}$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 4| \leq \dfrac{|u_0 - 4|}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
d/ En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge effectivement vers 4 et déterminer en particulier un entier N tel que pour tout $n \geq N$, 4 soit une valeur approchée de u_n à 10^{-6} près.