

Examen partiel du 12 décembre 1997

1. (3 points) Calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^3 + n^3} = \frac{1}{1 + n^3} + \frac{2^2}{2^3 + n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^3 + n^3} + \frac{n^2}{n^3 + n^3}$$

2. (3 points) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \frac{t^{75} \ln(1+t)}{(\sin \frac{\pi}{2}t)^{99}} dt$

3. (3 points) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\text{Arctan}x}{1+x^2} dx$

4. (8 points) Soient $a > 0, b > 0$, et soit $s_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{a + nb}$.

On se propose de montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$

a/ Montrer que $\int_0^1 t^{a-1} (-t^b)^n dt = \frac{(-1)^n}{a + nb}$

b/ En déduire que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{a + nb} = \int_0^1 t^{a-1} \left[\frac{1}{1+t^b} - \sum_{n=0}^N (-t^b)^n \right] dt$$

En calculant la somme de la suite géométrique $\sum_{n=0}^N (-t^b)^n$ et en majorant $\frac{1}{1+t^b}$ par 1, montrer que

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{a + nb} \right| \leq \frac{1}{a + (N+1)b}$$

et en déduire la valeur de $\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N$

c/ Applications : donner la valeur des limites : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

5. (8 points) On se propose de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, où $u_n = \frac{n^2}{[1^1 2^2 3^3 \dots n^n]^{\frac{4}{n^2}}}$

a/ Montrer que $\ln u_n = 2 \ln n - \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln n - \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}$

b/ On rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \ln n - \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln n \right) = 0$, et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}.$$

c/ On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$; il en résulte que la fonction $x \mapsto x \ln x$, prolongée par continuité par

la valeur 0 en 0, est continue sur \mathbb{R}^+ tout entier, et que l'intégrale $\int_0^1 x \ln x \, dx$ a un sens. Calculer cette intégrale, à l'aide d'une intégration par parties, en remarquant que $x \ln x \, dx = x \, d(x \ln x - x)$.

d/ Expriment $\int_0^1 x \ln x \, dx$ comme limite d'une somme de Riemann, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.
