UNIVERSITÉ PARIS VIII
DEUG LIT

INTÉGRATION
1996-97

Examen partiel du 12 décembre 1996

1. (3 points) $E(x)$ désignant la partie entière de x, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{3} E(\frac{1}{x})dx$ (indication : on pourra décomposer $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ en $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[1, \quad 3\right]$).

2. (3 points) Montrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+h} t \sin t \, dt = \frac{\pi}{2}$.

3. (6 points) On se propose de calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \left(1 + \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right)^{2n}$$

a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \, c_n \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$ t.q. :

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+c_n^2)^2}$$

b/ En déduire que :

$$\left(1 + \frac{1}{4n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^2}\right)^{2n} \leq u_n \leq \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n}$$

c/ On rappelle que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = 1$; montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n = \sqrt{e}$.

T.S.V.P.

4. (6 points) On se propose de calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+kn+n^2}$$

Montrer que cette limite a pour valeur l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.
Calculer cette intégrale, en vérifiant que :

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

et en déduire le résultat.

5. (6 points) a/ En écrivant : $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, vérifier que :

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int xd(\sqrt{1-x^2})$$

et en déduire, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive de $\sqrt{1-x^2}$.

b/ En utilisant le changement de variable $x = 2u-1$, en déduire le calcul de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{u(1-u)}du$$
