UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
Licence de mathématiques
2005-2006

Examen partiel du 16 décembre 2005

1. (8 points) Calculer les limites des sommes de Riemann :

a/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left[\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n}\right]=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+k}$ (réponse : $\ln 3-\ln 2$) ;

b/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+nk+k^2}$ (on pourra vérifier que $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ et donner une primitive de $x\mapsto\dfrac{x}{x^2+x+1}$ à l'aide des fonction $\ln$ et Arctan ; réponse : $\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$) ;

c/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arcsin}\dfrac{k}{n}$ (on pourra calculer l'intǵrale $\int_0^1\mathrm{Arcsin}t\ dt$ à l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable ; réponse : $\dfrac{\pi}{2}-1$).

2. (2 points) Calculer $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{1}{h}\int_1^{1+h}\dfrac{\left[\tan\frac{\pi}{4}(4x-3)\right]^{2005}}{(3x-2)^{2006}}\ dx$ (on pourra exprimer cette limite à l'aide d'une primitive F -qu'on ne cherchera surtout pas à calculer !- de la fonction à intégrer ; réponse : 1).

3. (5 points) À l'aide de deux intégrations par parties, trouver une primitive de $t\mapsto e^{-t}\sin t$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}e^{-t}\sin t\ dt$ (réponse : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$).

4. (4 points) Calculer les intégrales suivantes :

a/ $\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}\ dx$ et b/ $\int_0^1\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}\ dx$ (réponses : $\ln\dfrac{e+1}{2}$ et $e-1-\ln\dfrac{e+1}{2}$).

5. (5 points) On se propose de calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{dx}{x^4+1}$. Vérifier que

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x\sqrt{2}}{4}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{x\sqrt{2}}{4}}{x^2+x\sqrt{2}+1}=-\frac{\sqrt{2}}{8}.\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{8}.\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

En déduire une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^4+1}$ et calculer l'intégrale demandée (réponse : $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln 5+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{Arctan}2$).