UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
DEUG MIAS **2004-2005**

Examen partiel du 17 décembre 2004

1. (6 points) Calculer les limites des sommes de Riemann :

a/ $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{n^2 + k^2}{n^2 + nk + k^2}$;

b/ $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\sqrt{n-k}$

(On pourra dans b/ calculer l'intǵrale $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1-t}$.)

2. (6 points) On rappelle (ou on admettra) que $\forall a > 0$, $\forall b > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$.

En déduire le calcul des sommes : $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ et $S_3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+3}$.

(On commencera par déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{a}{1+X} + \dfrac{bX+c}{X^2-X+1}$.)

3. (2 points) Calculer $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h} x^4 \left(\operatorname{Arc}\tan x\right)^2\,dx$.

4. (4 points) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$ des deux façons suivantes :

a/ en faisant le changemement de variable $u = x^2$

b/ en utilisant la décomposition : $\dfrac{x}{x^4+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{1}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right]$

En déduire, en intégrant $\dfrac{x}{1+x^4}$ entre 0 et t, la formule valable pour t réel quelconque :

$\operatorname{Arc}\tan t^2 = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arc}\tan(t\sqrt{2}-1) - \operatorname{Arc}\tan(t\sqrt{2}+1)$.

Démontrer que $\operatorname{Arc}\tan 1 + \operatorname{Arc}\tan 2 + \operatorname{Arc}\tan 3 = \pi$.

5. (6 points) Pour tout $x \in]-1,1[$ (fixé), soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+x\cos t}$. En faisant le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, exprimer $I(x)$ en fonction de x à l'aide de la fonction $\operatorname{Arc}\tan$ (on rappelle que si $u = \tan\dfrac{t}{2}$, alors $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$). Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et en déduire que $I(x) = -4.\operatorname{Arc}\tan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.\left(\operatorname{Arc}\tan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'$ [le ( )' désigne la dérivée par rapport à x].

En déduire une primitive de la fonction I sur $]-1,1[$. Montrer que $\lim\limits_{a \longrightarrow 1} \displaystyle\int_{-a}^{a} I(x)\,dx$ existe et la calculer.