UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
DEUG MIAS **2003-2004**

Examen partiel du 16 décembre 2003

1. (6 points) Calculer les limites des sommes de Riemann :
a/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{n^3}{n^3+k^3}$ (on donne : $\dfrac{1}{1+x^3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{6}\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$);
b/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{k\pi}{2n}\sin\dfrac{k\pi}{2n}$ (intégration par parties).

2. (8 points) Calculer une primitive pour chacune des quatre fonctions suivantes, définies sur $[-1,1]$:
a/ $x\mapsto \operatorname{Arc}\cos x$; b/$x\mapsto\sqrt{1-x^2}$; c/ $x\mapsto x\operatorname{Arc}\sin x$; d/ $x\mapsto\sqrt{\dfrac{\operatorname{Arc}\cos x}{1-x^2}}$.
Calculer la valeur moyenne sur $[-1,1]$ de chacune de ces quatre fonctions.
(N.B. : la dernière fonction n'est pas définie aux bornes, mais sa primitive (n'importe laquelle) l'est, et l'intégrale sur $[-1,1]$ -intégrale impropre- a bien un sens.)

3. (3 points) Calculer $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_1^{1+h}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\operatorname{Arc}\tan x\,dx$ (on ne cherchera pas à calculer de primitive).

4. (3 points) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ (en écrivant que $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{1}{2}x.\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et en intégrant par parties).

5. (4 points) On considère l'équation différentielle : $y'+3y=e^{-t}\cos t \quad (1)$
a/ On cherche les solutions sous la forme $y(t)=z(t)e^{-3t}$ (N.B. s'il y avait 0 à la place de $e^{-t}\cos t$, il est facile de vérifier que ce serait la forme générale de la solution de (1), avec $z=Cte$). Montrer que $z'e^{-3t}=e^{-t}\cos t$ et en déduire que $z=\displaystyle\int e^{2t}\cos t\,dt$.
b/ Calculer la primitive la plus générale de $t\mapsto e^{2t}\cos t$ et en déduire la solution générale de (1).

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 2003

1. a/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{n^3}{n^3+k^3}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ (limite d'une somme de Riemann)

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(1+x)\right]_0^1-\frac{1}{6}\left[\ln(1-x+x^2)\right]_0^1+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc}\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\pi}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ (limite d'une somme de Riemann)

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\sin x-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

2. a/ $\int\operatorname{Arc}\cos x\,dx=x\operatorname{Arc}\cos x+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\operatorname{Arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}+Cte$

b/ $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, soit :

$2\int\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arc}\sin x+Cte$, i.e. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arc}\sin x\right)+Cte$

ou encore, par un changement de variable : si $u=\operatorname{Arc}\sin x$: alors $x=\sin u$ et $\sqrt{1-x^2}=\cos u$ $\left(\text{comme } u=\operatorname{Arc}\sin x\ ,\ -\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}\ ,\text{donc }\ \cos u\geq 0\right)$ et $dx=\cos u\,du$, donc :

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos^2u\,du=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)\ du=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+Cte=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+Cte$

$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Arc}\sin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+Cte.$

c/ $\int x\operatorname{Arc}\sin x\,dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{Arc}\sin x\,d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\operatorname{Arc}\sin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{Arc}\sin x+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arc}\sin x+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arc}\sin x+\frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arc}\sin x\right)+Cte$ (d'après le b/)

$=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Arc}\sin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+Cte.$

d/ Si $u=\operatorname{Arc}\cos x$: $\int\sqrt{\frac{\operatorname{Arc}\cos x}{1-x^2}}\,dx=-\int\sqrt{u}\,du=-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+Cte=-\frac{2}{3}\left(\operatorname{Arc}\cos x\right)^{\frac{3}{2}}+Cte.$

Valeur moyenne de ces 4 fonctions sur $[-1,1]$:

a/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{Arc}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[x\operatorname{Arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$

b/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\left[x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arc}\sin x\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}$

c/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\operatorname{Arc}\sin x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Arc}\sin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{8}.$

d/ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{\mathrm{Arc}\cos x}{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[-\left(\mathrm{Arc}\cos x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\pi^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3}$.

3. D'après la formule fondamentale du calcul intégral (i.e. $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b F'(t)\,dt$), si F est une primitive de la fonction sous le signe $\int$, $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{Arc}\tan x\,dx = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{F(1+h)-F(h)}{h}$ est la dérivée en 1 de F, c'est-à-dire la valeur en 1 de la fonction F', fonction sous le signe $\int$:
$\displaystyle\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{Arc}\tan x\,dx = \frac{1}{(1+1)^2}\mathrm{Arc}\tan 1 = \frac{1}{4}.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$.

4. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$
$\displaystyle = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arc}\tan x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi-2}{8}$.

5. a/ De $y(t) = z(t)e^{-3t}$ on tire en dérivant : $e^{-t}\cos t = y' + 3y = z'e^{-3t} - 3ze^{-3t} + 3ze^{-3t} = z'e^{-3t}$, d'où $z'(t) = e^{2t}\cos t$, i.e. en intégrant : $z(t) = \displaystyle\int e^{2t}\cos t\,dt\ +\ Cte$.
b/ On fait une double intégration par parties : $\displaystyle\int e^{2t}\cos t\,dt = \int e^{2t}d(\sin t) = e^{2t}\sin t - 2\int e^{2t}\sin t\,dt$ $\displaystyle = e^{2t}\sin t + 2\int e^{2t}d(\cos t) = e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\cos t - 4\int e^{2t}\cos t\,dt$, d'où en regroupant les $\displaystyle\int e^{2t}\cos t\,dt$: $\displaystyle 5\int e^{2t}\cos t\,dt = e^{2t}(\sin t + 2\cos t)\ +\ Cte$, et $\displaystyle z(t) = \int e^{2t}\cos t\,dt = \frac{1}{5}e^{2t}(\sin t + 2\cos t)\ +\ Cte$. On en déduit la solution générale de l'équation (1) : $y = z(t)e^{-3t} = \dfrac{1}{5}e^{-t}(\sin t + 2\cos t) + \lambda e^{-3t}$ (où λ est une constante réelle quelconque).