

Examen partiel du 14 décembre 2000

1. (5 points) Calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{(k^2 + n^2)^2} = \frac{1}{(1 + n^2)^2} + \frac{2^3}{(2^2 + n^2)^2} + \dots + \frac{(n-1)^3}{((n-1)^2 + n^2)^2} + \frac{n^3}{(n^2 + n^2)^2}$$

(indication : on pourra exprimer cette limite sous forme d'une intégrale, que l'on calculera, à l'aide de l'identité : $\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$).

2. (3 points) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h} \frac{(\sin t)^4 (\tan t)^{2001}}{t} dt$

3. (3 points) Donner la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{e}}^e \ln t dt$ (où e est la base des logarithmes népériens).

4. (5 points) Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$ (indication : on pourra faire les changements de variable successifs : $u = \sqrt{x}$, $t = \operatorname{Argsh} u$ et $s = e^t$... ou bien chercher à simplifier l'expression de la fonction).

5. (8 points) a/ Soit f de classe C^1 sur $[0, 1]$, $I = \int_0^1 f(t) dt$, et $u_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$.

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - I) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$ (indication : on

pourra écrire $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt$, utiliser pour chaque k la formule de Taylor-Maclaurin à

l'ordre 2 appliquée à une primitive de f entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$, et conclure à l'aide d'une somme de Riemann).

b/ On suppose de plus f de classe C^2 sur $[0, 1]$ et on pose :

$$v_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{2n}\right) + \dots + f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \dots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \right]. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(v_n - I) = \frac{f'(0) - f'(1)}{24}$$

(indication : on pourra écrire : $n^2(v_n - I) = 2n^2 \left(\frac{u_n + v_n}{2} - I \right) - n^2(u_n - I)$ et appliquer la formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 3 à une primitive de f pour chacun de ces deux termes comme dans le a/).