UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
DEUG LIT **1997-98**

Examen final (2e session) du 29 juin 1998

1. (4 points) Calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k^4+n^4} = \frac{1}{1+n^4} + \frac{2^3}{2^4+n^4} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{(n-1)^4+n^4} + \frac{n^3}{n^4+n^4}$$

2. (4 points) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{[\mathrm{Arctan} x]^2}{1+x^2} dx$ converge et la calculer.

3. (4 points) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ converge.

En utilisant l'identité : $1 = (x^2+1) - x^2$, montrer que

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int x \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' dx$$

(noter le " $'$ " de dérivation en haut de la dernière parenthèse).

En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ et la valeur de l'intégrale I.

4. (4 points) Donner en fonction de $r, R,$ et α la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int\int_{r^2 \le x^2+y^2 \le R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$

5. (8 points) Soit l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}$

– En intégrant d'abord en y (on pourra faire le changement de variable $y = \dfrac{t}{\sqrt{x}}$), puis en x, montrer que cette intégrale converge, et donner sa valeur (on pourra pour cela utiliser le changement de variable $u = \sqrt{x}$)

– En utilisant la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{1}{1-y^2}\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1-y^2}\frac{1}{1+xy^2}$$

(vérifier cette égalité), et en intégrant d'abord en x, en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1} dy$ converge et donner sa valeur. Quel théorème utilise-t-on ici, et qu'est-ce qui permet de l'appliquer ?