UNIVERSITÉ PARIS VIII — **INTÉGRATION**

DEUG LIT — **1996-97**

Examen final (2^e session) du 1^er juillet 1997

1. (4 points) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ converge.
La calculer en utilisant le changement de variable $x = \sin^2 t$.

2. (4 points) Calculer par intégration par parties les intégrales :

$$\text{a/} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x dx\,; \qquad \text{b/} \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{Arctan} x dx.$$

3. (8 points) On se propose de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right]$
$\left(= \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right]\left[1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\right]\dots\left[1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{n}\right]\right)$.

a/ Vérifier que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\quad |\ln(1+x) - x| \leq x^2$ (on étudiera pour cela les variations sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ de $g : x \mapsto \ln(1+x) - x - x^2$ et de $h : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2$).

b/ En déduire que pour n assez grand,

$$\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi^2}{n^2}\sin^2\frac{k\pi}{n} \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right) \leq \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi^2}{n^2}\sin^2\frac{k\pi}{n}$$

Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$? Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$? En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\prod_{k=1}^{n}\left[1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right] = \int_0^{\pi}\sin t dt$$

et enfin que :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left[1 + \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right] = e^2$$

.

4. (4 points) Montrer en passant en coordonnées polaires que l'intégrale
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(2+x^2+y^2)^2}$ converge et la calculer.

5. (4 points) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+y)e^{-xy}dxdy$ (séparer l'intégrale en deux parties et faire les changements de variable $(x,y) \mapsto (x, e^{-xy})$ dans l'une et $(x,y) \mapsto (y, e^{-xy})$ dans l'autre).