UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
DEUG LIT **1996-97**

<u>Examen final du 11 février 1997</u>

1. (4 points) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx$ converge.

En utilisant l'identité : $x+1 = (x^2+1)(x+1) - x^2(x+1)$, montrer que

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int x(x+1) \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' dx$$

(noter le " $'$ " de dérivation en haut de la dernière parenthèse).
En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}$ et la valeur de l'intégrale I.

2. (8 points) Soit f une fonction 2 fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0,1]$.

– Quelle est la limite de la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$?

On se propose de déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$, i.e. de préciser le terme ℓ dans le développement limité en $\frac{1}{n}$: $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{\ell}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

– Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^3} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''\left(\frac{k-t}{n}\right) dt$
(appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre a et $a+h$ à une primitive F de f, avec $a = \frac{k}{n}$ et $h = -\frac{1}{n}$).

– En déduire que

$$n \left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''\left(\frac{k-t}{n}\right) dt$$

– Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''\left(\frac{k-t}{n}\right) dt \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''\left(\frac{k-t}{n}\right) dt = 0$

– En déduire que $\displaystyle\ell = \lim_{n \to +\infty} n \left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(0) - f(1)}{2}$
(utiliser une somme de Riemann sur f').

3. (4 points) Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose I ... $\displaystyle\int^{+\infty} \int^{+\infty} dxdy$

Pour quelles valeurs de α cette intégrale converge-t-elle ? (passer en coordonnées polaires).
La calculer alors en fonction de α.

4. (8 points) Soit l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}$

- En intégrant d'abord en y (on pourra faire le changement de variable $y = \dfrac{t}{\sqrt{x}}$), puis en x, montrer que cette intégrale converge, et donner sa valeur (on pourra pour cela utiliser le changement de variable $u = \sqrt{x}$)
- En utilisant la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{1}{1-y^2}\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1-y^2}\frac{1}{1+xy^2}$$

(vérifier cette égalité), et en intégrant d'abord en x, en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1}dy$ converge et donner sa valeur. Quel théorème utilise-t-on ici, et qu'est-ce qui permet de l'appliquer ?