Examen final du 4 février 2005

1. (4 points) Calculer les limites : a/ $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\operatorname{Arc}\tan\frac{k}{n}}{k^2+n^2}$; b/ $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{(n+k)\sqrt{k}}$.

2. (3 points) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ converge et la calculer (on pourra poser $u=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$).

3. (3 points) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2}$ (passer en coordonnées polaires).

4. (4 points) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ converge et la calculer. On pourra poser $u=\sqrt{x}$ et utiliser l'identité (qui n'est pas à démontrer) : $\displaystyle\frac{1}{1+X^3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+X}-\frac{\frac{1}{6}(2X-1)}{X^2-X+1}+\frac{\frac{1}{2}}{X^2-X+1}$.

5. (5 points) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^2}$ converge et la calculer (on pourra faire une intégration par parties et poser $X=e^x$). En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}{(1+e^{x^2+y^2})^2}\,dx\,dy$.

6. (6 points) a/ En utilisant l'identité (qui n'est pas à démontrer) :

$$\frac{1}{1+X^6}=\frac{\frac{1}{3}}{1+X^2}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+X\sqrt{3}+1}-\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-X\sqrt{3}+1}\right]+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{X^2+X\sqrt{3}+1}+\frac{1}{X^2-X\sqrt{3}+1}\right],$$

calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$.

b/ On se propose de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2y)(1+xy^2)}$. Montrer qu'elle converge (on pourra la séparer en deux intégrales, l'une, convergente, sur le compact du plan constitué du carré unité $Q(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$, l'autre sur $\mathbb{R}^2_+\setminus Q(0,1)$, ensemble sur lequel on pourra minorer le dénominateur par $(1+x^2)(1+y^2)$).

En utilisant l'identité (qui n'est pas à démontrer) en la variable Y :

$$\frac{1}{(1+x^2Y)(1+xY^2)}=\frac{1}{1+x^3}\left[x\cdot\frac{x^2}{1+x^2Y}-\frac{x}{2}\cdot\frac{2xY}{1+xY^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{Y^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\right],$$

on montrera qu'une primitive du premier membre comme fonction de Y est $\displaystyle\frac{1}{1+x^3}\left[x\cdot\ln\frac{1+x^2Y}{\sqrt{1+xY^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{Arc}\tan Y\sqrt{x}\right]$.

En intégrant d'abord en y, puis en x, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2y)(1+xy^2)}$ à l'aide de l'intégrale (que l'on ne cherchera pas à calculer) $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x\,dx}{1+x^3}$.