UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
DEUG MIAS **2003-2004**

<u>Examen final du 5 février 2004</u>

1. (3 points) Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ (prendre le logarithme et une somme de Riemann).

2. (3 points) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{(x-y)^2}{1+x^2+y^2} dxdy$ (passer en coordonnées polaires).

3. (4 points) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$ converge et la calculer. On pourra poser $u = \sqrt{x}$ et utiliser la décomposition en éléments simples : $\dfrac{x^2}{1+x^4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \dfrac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\right]$.

4. (5 points) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^3}$. (Indications : a/ intégrer par parties pour faire disparaître le x du numérateur ; b/ écrire $\dfrac{dx}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x\,dx}{e^x(1+e^x)^2}$ et faire le changement de variable $u = e^x$; c/ décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{u(1+u)^2}$, i.e. l'écrire $\dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{1+u} + \dfrac{c}{(1+u)^2}$)

5. (5 points) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx$ converge. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que cette intégrale a pour valeur $\dfrac{2y}{1+4y^2}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx$ converge et la calculer. En déduire, à l'aide du théorème de Fubini, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

6. (5 points) Pour tout $x \in]-1,1[$, soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+x\sin t}$. En faisant le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, exprimer $I(x)$ en fonction de x à l'aide de la fonction $\mathrm{Arc}\tan$ (on rappelle que si $u = \tan\dfrac{t}{2}$, alors $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$). Montrer, en dérivant les deux membres, l'égalité valable pour tout $x \in]-1,1[$:
$\mathrm{Arc}\tan\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arc}\tan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos x$ et en déduire la valeur de $I(x)$ en fonction de x. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 I(x)\,dx$ converge et la calculer.

UNIVERSITÉ PARIS VIII **INTÉGRATION**
DEUG MIAS **2003-2004**

Corrigé de l'examen final du 5 février 2004

1. $\ln \sqrt[2n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}} = \dfrac{1}{2n}\ln\dfrac{(2n)!}{n!n^n} = \dfrac{1}{2n}\ln\dfrac{(n+1)\dots 2n}{n^n} = \dfrac{1}{2n}\ln\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right\}$
$= \dfrac{1}{2n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$, ce qui est une somme de Riemann dont la limite pour $n \longrightarrow +\infty$ est $\dfrac{1}{2}$ fois l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)dx$, ou encore l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx$. Cette intégrale a pour valeur $[x\ln x - x]_1^2$ (puisqu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x\ln x - x$, comme le montre une intégration par parties), soit $2\ln 2 - 1$.
Il en résulte que : $\ln \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln \sqrt[2n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}} = \dfrac{1}{2}(2\ln 2 - 1) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} = \ln\dfrac{2}{\sqrt{e}}$, et donc que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$

2. Passage en coordonnées polaires : $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{(x-y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^2(\cos\theta-\sin\theta)^2}{1+r^2} r\,dr$
$\displaystyle = \int_0^{2\pi} \cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\,d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1+\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\,d\theta \times \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+r^2}\right)\,d(r^2)$
$\displaystyle = \pi \times \frac{1}{2}\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$

3. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, il ne peut donc y avoir de problème de convergence qu'en $+\infty$. Mais sur $[1,+\infty[$, $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2} \le x^{-\frac{3}{2}}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\,dx < +\infty$, donc l'intégrale converge. En utilisant le changement de variable proposé : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2} = \int_0^{+\infty}\frac{ud(u^2)}{1+u^4} = 2\int_0^{+\infty}\frac{u^2\,du}{1+u^4}$ = (d'après la décomposition en éléments simples donnée) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_0^{+\infty}\frac{2u\,du}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \int_0^{+\infty}\frac{2u\,du}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right]$
$\displaystyle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_0^{+\infty}\frac{(2u-\sqrt{2})\,du}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \int_0^{+\infty}\frac{(2u+\sqrt{2})\,du}{u^2+u\sqrt{2}+1} + \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\,du}{u^2-u\sqrt{2}+1} + \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\,du}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right]$
$\displaystyle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
$\displaystyle = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{u-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{u+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

4. L'intégrale converge, car pour $x \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^3}$ est équivalent à xe^{-2x} et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$
$\displaystyle = -\frac{1}{2}\left[xe^{-2x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4} < +\infty$. On peut donc la calculer :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^3} = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\,d\left(\frac{1}{(1+e^x)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1+e^x)^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+e^x)^2}$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^x\,dx}{e^x(1+e^x)^2} =$ (en posant $u=e^x$) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{du}{u(1+u)^2}$.

Décomposons alors la fraction rationnelle $\dfrac{1}{u(1+u)^2}$ en éléments simples :

$\dfrac{1}{u(1+u)^2} = \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{1+u} + \dfrac{c}{(1+u)^2}$. Par identification en 0 (après multiplication par u), -1 (après multiplication par $(1+u)^2$) et $+\infty$ après multiplication par $1+u$), on obtient $a=1,\ c=-1,\ a+b=0$, soit $\dfrac{1}{u(1+u)^2} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u} - \dfrac{1}{(1+u)^2}$, d'où : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{du}{u(1+u)^2} = \left[\ln \dfrac{u}{1+u}\right]_1^{+\infty} + \left[\dfrac{1}{1+u}\right]_1^{+\infty}$

$= \ln 2 - \dfrac{1}{2}$ et finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^3}\,dx = \dfrac{1}{2}\left[\ln 2 - \dfrac{1}{2}\right]$

5. $\forall y \in \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|e^{-x}\sin 2xy\right|\,dx \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 < +\infty$, donc $\forall y \in \mathbb{R}$, cette intégrale est convergente.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx = -\int_0^{+\infty} \sin 2xy\,d(e^{-x}) = -\left[e^{-x}\sin 2xy\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2ye^{-x}\cos 2xy\,dx$

$= 2y\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos 2xy\,dx = -2y\int_0^{+\infty} \cos 2xy\,d(e^{-x})$

$= -2y\left[e^{-x}\cos 2xy\right]_0^{+\infty} - 2y\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}2y\sin 2xy\,dx = 2y - 4y^2\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx$, d'où

$(1+4y^2)\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx = 2y$, i.e. finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx = \dfrac{2y}{1+4y^2}$. On en déduit le calcul de l'intégrale double : $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx = \int_0^1 \dfrac{2y\,dy}{1+4y^2} = \dfrac{1}{4}\left[\ln(1+4y^2)\right]_0^1 = \dfrac{1}{4}\ln 5$.

Enfin, comme $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{+\infty} \left|e^{-x}\sin 2xy\right|\,dx \leq \int_0^1 dy\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 < +\infty$, on peut appliquer le théorème de Fubini et écrire, en permutant les intégrations par rapport à x et par rapport à y :

$\dfrac{1}{4}\ln 5 = \displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2xy\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx\int_0^1 \sin 2xy\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx\int_0^1 2\sin xy\cos xy\,dy$.

Or $\displaystyle\int_0^1 2\sin xy\cos xy\,dy = \dfrac{1}{x}\int_{y=0}^{y=1} d\left(\sin^2 xy\right) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\dfrac{\sin^2 x}{x}\,dx = \dfrac{1}{4}\ln 5$.

6. Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, en posant $u = \tan\dfrac{t}{2}$, i.e. $t = 2\mathrm{Arc}\tan u$, on obtient :

$I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{1+x\sin t} = \int_{u=0}^{u=1} \dfrac{d\left(2\mathrm{Arc}\tan u\right)}{1+x\dfrac{2u}{1+u^2}} = 2\int_0^1 \dfrac{du}{1+u^2+2xu} = 2\int_0^1 \dfrac{du}{(u+x)^2+1-x^2}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{u+x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]_{u=0}^{u=1} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{Arc}\tan\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arc}\tan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

Or en dérivant par rapport à x la quantité entre crochets, on obtient :

$\left(\mathrm{Arc}\tan\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arc}\tan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1-x^2+x(x+1)}{1-x^2+(x+1)^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1-x^2+x^2}{1-x^2+x^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1+x}{2+2x} - 1\right) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos x\right)'$, donc la quantité entre crochets ne diffère de $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos x$ que par une constante sur l'intervalle $]-1,1[$, et en faisant $x=0$, on obtient $\mathrm{Arc}\tan 1 - \mathrm{Arc}\tan 0 = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos 0 + Cte$, donc la constante est nulle, et on a bien :

$\forall x \in]-1,1[$, $\mathrm{Arc}\tan\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arc}\tan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos x$.

On en déduit que $I(x) = \dfrac{\operatorname{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$. Comme le numérateur $\operatorname{Arc}\cos x$ est borné, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-1}^{1} I(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente comme $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc}\sin 1 - \operatorname{Arc}\sin(-1) = \pi$, et sa valeur est : $\displaystyle\int_{-1}^{1} I(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[(\operatorname{Arc}\cos x)^2\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$