Examen final (2^e session) du 29 juin 2001

1. (4 points) Quelle est la limite de la suite de terme général
$u_n = \frac{1}{1+n^3} + \frac{2^2}{2^3+n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^3+n^3} + \frac{n^2}{n^3+n^3}$?

2. (4 points) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{Arc}\sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ converge et la calculer.

3. (6 points) Montrer que l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ converge.

Écrire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\frac{1}{1+X^3}$ (rappel : cette décomposition est de la forme $\frac{a}{1+X} + \frac{bX+c}{1-X+X^2}$; pour déterminer a, b et c, on pourra procéder par identification) et en déduire : a/une primitive sur $[1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$; b/ la valeur de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

En déduire (à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x}$) la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1+x^3}$

4. (4 points) Calculer l'intégrale double sur le quart de disque : $\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}} \frac{xy}{1+x^2+y^2}dx\,dy$ (passer en coordonnées polaires). Que dire de l'intégrale de la même fonction sur le disque unité tout entier ?

5. (8 points) Soit l'intégrale $\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x)(1+xy^2)}$.

En intégrant d'abord en y (avec le changement de variable $t = y\sqrt{x}$, d'où $dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{x}}dx\,dt$), montrer que cette intégrale converge ; la calculer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

En utilisant la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$:
$\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{1}{1-y^2}\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1-y^2}\frac{1}{1+xy^2}$ (vérifier cette égalité), et en intégrant d'abord en x, en déduire que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1}dy$ converge et donner sa valeur. Quel théorème permet ici d'intervertir l'ordre d'intégration (en x, puis en y, ou l'inverse) et qu'est-ce qui justifie son application ?