Examen partiel du 10 décembre 1998

1. (4 points) Trouver deux nombres complexes de somme $5 - 2i$ et de produit $21 - i$.

2. (4 points) Montrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{i\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{1\} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$

est une bijection. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan, images des complexes $z = x+iy$ tels que $|f(z)| = 3$ (on rappelle que le cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$).

3. (6 points) a/ Donner module et argument des nombres complexes $1+i$ et $1-i$.
b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z^2 = 1+i$ et $z^2 = 1-i$ d'abord sous forme trigonométrique (exponentielle), puis sous forme algébrique (on pourra résoudre d'abord la première, puis utiliser le fait que si $z^2 = \alpha$, alors $\overline{z}^2 = \overline{\alpha}$ pour résoudre la seconde).
c/En déduire cosinus et sinus de $\dfrac{\pi}{8}$.
d/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en z : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
e/ Déduire de b/ et d/ la résolution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.

4. (4 points) Soit le polynôme $P = X^3 + (2+i)X^2 + (1+2i)X + i$. Calculer le polynôme P', dérivé de P, et factoriser P' dans $\mathbb{C}[X]$ (on notera que $-2i = (1-i)^2$). On admettra que dans $\mathbb{C}[X]$, comme dans $\mathbb{R}[X]$, α est racine de P avec un ordre de multiplicité ≥ 2 si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$; montrer que P a une racine double dans $\mathbb{C}$ et le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

5. (6 points) a/ Soit le polynôme $P = X^{2n} + X^n + 1$; on veut vérifier dans un premier temps que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont toutes distinctes : montrer que si α est racine de P', polynôme dérivé de P, alors soit $\alpha = 0$, soit $\alpha^n = -\dfrac{1}{2}$; en déduire que si α est racine de P', alors α ne peut être racine de P, et la conclusion cherchée.
b/ Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^{2n} + z^n + 1 = 0$ (1). Montrer que cette équation équivaut au système (2) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Z^2 + Z + 1 & = & 0 \\ z^n & = & Z \end{array}\right.$$

Résoudre l'équation $Z^2+Z+1 = 0$ dans $\mathbb{C}$, et en déduire sous forme trigonométrique (exponentielle) l'ensemble des solutions du système (2) et les $2n$ racines du polynôme P.
c/ Dans le cas où $n = 4$, représenter dans le plan complexe les 8 racines du polynôme P. Pourquoi pouvait-on prévoir qu'elles seraient conjuguées deux à deux ?